

Задачи к семинару «Некоторые точно решаемые потенциалы»

1 октября 2016 г.

Упражнение (10 баллов)

Рассмотрите свободное движение частицы с энергией E в трёхмерном пространстве, используя сферические координаты. Для частицы с орбитальным моментом l , выразите радиальную часть волновой функции через функции Бесселя (возможно, с нецелым индексом).

Задачи (90 баллов)

Задача 1. QHO in a box (25 баллов) Рассмотрите квантовый гармонический осциллятор, помещённый в большую коробку с бесконечными стенками размера $2L$ ровно посередине, так что потенциальная энергия имеет следующий вид:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & |x| < L \\ \infty, & |x| > L \end{cases}$$

Считая размеры коробки достаточно большими (так что $L \gg \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$), определите сдвиг низколежащих уровней энергии (таких что $n \ll \frac{L^2}{\hbar/m\omega}$).

Задача 2. Hydrogen atom in 2D (25 баллов) Определите уровни энергии и кратности их вырождения для двумерной частицы, движущейся в притягивающем потенциале $U(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r}$. Указание: задача приводится к вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$.

Задача 3. Ступенька (40 баллов) Определите коэффициенты прохождения и отражения от потенциала $U(x) = \frac{1}{2}U_0 \tanh \frac{x}{a}$. Указание: при помощи замены $\xi = -e^{-2x/a}$, задача приводится к гипергеометрической функции ${}_2F_1$.