Задачи по Квантовой Механике Весна 2015
Задание 4: Катастрофа ортогональности

1. (10) Рассмотрите ферми-газ с примесью, которая представляет собой двухуровневую систему $|\updownarrow\rangle$. Когда примесь находится в состоянии $|\uparrow\rangle$, Гамильтониан Ферми-газа равен $\hat{H}_i$. Когда примесь находится в состоянии $|\downarrow\rangle$, Гамильтониан Ферми-газа равен $\hat{H}_f = \hat{H}_i + \hat{V}$. При $t = -\infty$ примесь находится в состоянии $|\uparrow\rangle$, а Ферми-газ - в основном состоянии. При $t = 0$, воздействием быстрого внешнего импульса, примесь приводится в состояние, являющееся суперпозицией (с равными амплитудами) состояний $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$. Выразите матрицу плотности двухуровневой системы в момент времени $t > 0$ через средние, составленные из операторов $\hat{H}_i$ и $\hat{H}_f$, по основному состоянию Ферми-газа. *Примечание. См. также задачу 5.*

2. (25) В этой задаче предлагается **численно** исследовать интеграл перекрытия основных состояний $N/2$ бесспиновых фермионов на решётке из $N \gg 1$ узлов с дефектом и без него. Для размера системы можно использовать, например, следующие значения: $N = 2^i$ с $i = 4..10$.

   - Рассмотрите прыжковый Гамильтониан ($t_i = 1$)

     $$\hat{H}_i = \sum_{i=1}^{N-1} \left(t_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_{i+1} + c.c. \right).$$

     Найдите его одночастичные волновые функции и энергии. Вычислите энергию основного состояния E_i.

   - Рассмотрите Гамильтониан $\hat{H}_f$, который получается из $\hat{H}_i$ изменением амплиды перескока черезь связь в середине цепочки: $t_{N/2} \to 1.1$. Найдите его одночастичные волновые функции и энергии. Вычислите энергию основного состояния E_f.

   - Изобразите зависимость $E_f - E_i$ как функцию N. Каков характер этой зависимости?

   - Вычислите перекрытие многочастичных волновых функций, отвечающих $N/2$-фермионным основным состояниям: $M = \langle \Psi_i | \Psi_f \rangle$. Изобразите $\ln M$ как функцию $\ln N$.

3. (30) (В термодинамическом пределе) рассмотрите состояние системы фермионов на участке прямой $-L/2 \leq x \leq L/2$ (ограниченной бесконечно высокими стенками) с потенциальным рассеивателем и без него, так что одночастичные Гамильтонианы имеют вид:

$$\hat{h}_i = \frac{\hat{p}^2}{2m},\ \hat{h}_f = \hat{h}_i + u\delta(\hat{x}).$$

   - Постройте базис нормированных собственных функций $\hat{h}_i$. Удобно разделить состояния на чётные и нечётные относительно начала координат:
$$\psi_{e,n}(x),\ \psi_{o,n}(x).$$
   - Постройте базис нормированных собственных функций $\hat{h}_f$:
$$\phi_{e,n}(x),\ \phi_{o,n}(x).$$
   - Обратите внимание, что при вычислении M состояния с разной чётностью следует рассматривать отдельно. Так как рассеиватель симметричен относительно $x \to -x$, вклад даёт только чётный канал. Вычислите матрицу амплитуд $A_{mn} = \langle \psi_{e,n} | \phi_{e,m} \rangle$.
   - Пользуясь рассмотренным на семинаре представлением для $|M|^2$, получите оценку сверху для этой величины. При каких u справедлива эта оценка?

4. (40) (В термодинамическом пределе) рассмотрите ферми-газ в трёх измерениях, при $t \to -\infty$ находящийся в основном состоянии $|\Psi_i\rangle$. При конечном t адиабатически включается потенциал примеси:

$$\hat{v} = e^{\delta t} u\delta(\hat{\mathbf{r}}).$$

   - Покажите, что при малых δ волновая функция в результате такой эволюции $|\Psi_f\rangle$ является волновой функцией основного состояния Гамильтониана с потенциальной примесью. С какой точностью?
   - Покажите, что

$$|\Psi_f\rangle = \mathcal{T} e^{-i\int_{-\infty}^{0} dt \hat{V}(t)} |\Psi_i\rangle \tag{1}$$

- Покажите, что логарифм интеграла перекрытия $M = \langle \Psi_i | \Psi_f \rangle$ можно получить в виде следующего ряда:

$$\ln M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n, \tag{2}$$

  где каждое из F_n даётся единственной диаграммой порядка n по потенциалу взаимодействия. Что это за диаграмма?

- Вычислите F_1 и F_2 из ряда теории возмущений, Ур. (2).
- Пользуясь полученными выше результатами, оцените $|M|$.

5. (15+25) Рассмотрите корреляционную функцию $\chi(t)$, описывающую зависимость матрицы плотности двухуровневой системы из задачи 1, от времени.

   - (15) Аналогично задаче 3, сведите вычисление корреляционной функции $\chi(t)$, к вычислению детерминанта некоторого оператора, действующего на одночастичные волновые функции. Выпишите этот оператор.
   - (25) Пользуясь результатом, полученным в предыдущем пункте, найдите **численно** зависимость $\chi(t)$ для системы конечного (но большого) размера (в модели задачи 2).