

Задачи к семинару «Матрицы плотности»

4 марта 2017 г.

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1 (15 баллов) Рассмотрите частицы с угловым моментом 1 в базисе состояний с проекциями $J_z = +1, 0, -1$. Пусть ансамбль описывается следующей матрицей плотности:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1. Является ли $\hat{\rho}$ допустимой матрицей плотности? Какое состояние она описывает — чистое или смешанное? Найдите энтропию такого состояния.
2. Вычислите среднее значение и среднеквадратичное отклонение наблюдаемой $\hat{J}_z$.

Упражнение 2 (15 баллов) Вычислите среднее значение спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ и его флуктуацию $\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle$ для чистого $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ и смешанного $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{P}}_{\uparrow} + \hat{\mathbb{P}}_{\downarrow})$ состояний спина-1/2.

Задачи (70 баллов)

Задача 1. Дефазировка (35 баллов)

Рассмотрите двухуровневую систему с следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = (B + \delta B(t))\hat{\sigma}_z \quad (2)$$

Функция $\delta B(t)$ задаёт «продольный» гауссов белый шум, с нулевым средним $\langle \delta B(t) \rangle = 0$ и коррелятором $\langle \delta B(t)\delta B(t') \rangle = \gamma\delta(t-t')$. Таким белым шумом можно моделировать взаимодействие с окружающей средой. В начальный момент времени $t = 0$ система находится в когерентной суперпозиции $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$.

1. Найдите матрицу плотности в момент времени t , считая $\delta B(t)$ заданной функцией времени.
2. Выполните усреднение по $\delta B(t)$ и определите характер зависимости оффдиагональных элементов матрицы плотности от времени.

Подсказка: с гауссовым белым шумом можно работать, например, дискретизовав время, и считая значение шума в любой момент времени независимой случайной величиной.

Задача 2. Горе-резервуар (35 баллов)

Рассмотрите двухуровневую систему (A , описываемую спином-1/2 с операторами $\hat{\sigma}$), взаимодействующую с квантовым гармоническим осциллятором (B , описываемую лестничными операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$):

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}^z + \omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + V(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^- + \hat{a}\hat{\sigma}^+) \quad (3)$$

Для удобства вычислений можете считать частоту осциллятора совпадающей с энергией возбуждения двухуровневой системы, $\epsilon = \omega$. В начальный момент времени система описывается чистым состоянием:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_A \otimes |n=0\rangle_B \quad (4)$$

1. Вычислите полную матрицу плотности $\hat{\rho}_{AB}(t)$ как функцию времени.
2. Найдите редуцированную матрицу плотности двухуровневой системы $\hat{\rho}_A(t)$.
3. Постройте (качественно) зависимость энтропии всей системы AB и подсистемы A как функцию времени.