

Задачи к семинару «Топологические явления в физике. Цепочка SSH.»

25 марта 2017

Упражнение 1. Почти нулевые моды (20 баллов)

Рассмотрите цепочку SSH конечной длины в топологической фазе, содержащую $2N$ узлов. Оцените энергию уровней, лежащих ближе всего к нулю.

Задача 1. Обобщение модели (30 баллов)

Изучите модель, аналогичную классической цепочке SSH, но в которой чередуются три значения прыжковой амплитуды

$$\mathcal{H} = \sum_i t_1 c_{3i+1}^+ c_{3i} + t_2 c_{3i+2}^+ c_{3i+1} + t_3 c_{3i+3}^+ c_{3i+2} + \text{h.c.}$$

1. Найдите выражение для преобразования, реализующего киральную симметрию $\mathcal{CHC} = -H$. Какой вид она принимает после перехода к индексации по элементарным ячейкам (содержащим теперь три атома)?
2. Перейдите к импульсному представлению и запишите выражение для Блоховского гамильтониана. Какой вид принимает киральная симметрия в импульсном представлении?
3. Рассмотрите полубесконечную цепочку и найдите критерий наличия краевых мод.
4. Как изменится ответ, если некоторое количество связей, ближайших к концу цепочки имеют произвольные значения прыжковых амплитуд?

Задача 2. Насос SSH (50 баллов)

Рассмотрите обычную модель SSH, в которую добавлена чередующаяся энергия на узлах V :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{SSH} + V \sum (-1)^i c_i^+ c_i.$$

1. Запишите гамильтониан Блоха для этой задачи.
2. Пусть параметры задачи адиабатически медленно меняются со временем τ по закону:

$$t_1 = \cos \tau, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad V = \sin \tau.$$

Какой заряд будет перекачиваться цепочкой за один период колебаний? *Указание:* одно из решений использует рассуждения, аналогичные приведенным в конце абзаца “симметрично-защищенные краевые моды” в тексте семинара.

3. Пусть система адиабатически меняется по произвольному закону, но так, что все время в спектре остается щель. Какие значения может принимать заряд, переносимый за период? Попробуйте придумать топологический инвариант, связанный с этой характеристикой системы. *Подсказка:* исследуйте отображение из квадрата $BZ \times T$ (BZ — зона Бриллюэна $[-\pi, \pi]$, $\pi \sim -\pi$, а T — период) в сферу, заданное отнормированным вектором $\mathbf{d}$ из Блоховского гамильтониана $\mathcal{H} = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.