Задачи к семинару «Теория рассеяния и формула Борна»

7 февраля 2018 г.

Упражнения (30 баллов)

Упражнение 1. Борновское приближение (20 баллов) В рамках Борновского приближения, рассмотрите рассеяние на следующих потенциалах:

1. **(10 баллов)** $V(\boldsymbol{r}) = V_0 \frac{a^n}{r^n + a^n}$, $n > 3$, случай медленных частиц $ka \ll 1$. Рассмотрите также предел $n \to \infty$, когда потенциал превращается в сферическую прямоугольную яму.

2. **(10 баллов)** $V(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$(потенциал Юкавы). Рассмотрите также предельный переход $\kappa \to 0$ (закон Кулона).

Упражнение 2. Соотношение унитарности (10 баллов) Исходя из соотношения унитарности на языке T-матрицы, полученного на семинаре

$$\hat{T}_E - \hat{T}_E^\dagger = -2\pi i \hat{T}_E \delta(E - \hat{H}_0) \hat{T}_E^\dagger \tag{1}$$

получите соотношение унитарности на языке амплитуды рассеяния (результат также был предъявлен на семинаре):

$$f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') - f^*(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}) = i \frac{k}{2\pi} \int d\boldsymbol{n}'' f(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'') f^*(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}''). \tag{2}$$

Задачи (70 баллов)

Задача 1. Welcome to Flatland! (40 баллов)

Одномерие (15 баллов) Выведите формулы Борновского приближения для одномерного пространства. Амплитуда рассеяния определяется согласно:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{kr}} + f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') \cdot i e^{ik|\boldsymbol{r}|} \tag{3}$$

Что из себя представляет величина f и как она связана с амплитудами прохождения и отражения t, r? Что из себя представляет сечение рассеяния в одномерии?

Двумерие (25 баллов) А теперь повторите вывод для двумерного пространства. В двумерии амплитуда определяется согласно:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{kr}} + f(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') \cdot e^{i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{4}$$

Указание: функция Грина свободного движения выражается через какие-то из модифицированных функций Бесселя.

Задача 2. Глубокий мелкий рассеиватель? (15 баллов)

Рассмотрите рассеяние медленных частиц на одномерном потенциале $V(x) = -V_0 \frac{a}{a+|x|}$. Используя результат предыдущей задачи, вычислите коэффициент прохождения частиц в ведущем Борновском приближении.

Задача 3. Двухатомная молекула (15 баллов)

Смоделируем двухатомную полярную молекулу потенциалом вида $V(\boldsymbol{r}) = V_0(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{R}}{2}) + V_0(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{R}}{2})$ (вектор $\boldsymbol{R}$ соединяет два атома, а $V_0(\boldsymbol{r})$ представляет собой потенциал рассеяния на отдельном атоме). В рамках Борновского приближения, свяжите дифференциальное сечение рассеяния на такой молекуле с сечением на отдельном атоме. Считая различные ориентации молекулы равновероятными, усредните по ним результат. Как связаны полные сечения рассеяния для случая медленных ($kR \ll 1$) и достаточно быстрых ($ka \sim 1$, но $R \gg a$, где a — характерный масштаб потенциала $V_0(r)$) частиц.