

# Задачи к семинару «Открытые двухуровневые системы»

21 февраля 2018 г.

## Задача 1. Флуктуационно-диссипационная теорема (15 баллов)

Вне зависимости от происхождения индуцированного окружающей средой шума  $\hat{X}(t)$ , на его корреляционные функции можно вывести соотношения самого общего вида, используя лишь следующие общие предположения: гамильтониан  $\hat{H}_e$  не зависит от времени; и матрица плотности окружающей среды имеет вид  $\hat{\rho}_e = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_e}$ .

1. Рассмотрите следующие две корреляционные функции:

$$S_{>}(t_1 - t_2) = \langle \hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2) \rangle, \quad S_{<}(t_1 - t_2) = \langle \hat{X}(t_2) \hat{X}(t_1) \rangle = S_{>}(t_2 - t_1) \quad (1)$$

Используя формальное сходство между матрицей плотности и оператором эволюции в мнимом времени, покажите, что эти функции связаны соотношением  $S_{<}(t) = S_{>}(t - i\beta)$ . Что это означает для их фурье-образов,  $S_{<}(\omega)$  и  $S_{>}(\omega)$ ?

2. Определим «спектральную плотность» как  $J(\omega) = \frac{1}{2}(S_{>}(\omega) - S_{<}(\omega))$ , и Келдышевский коррелятор как  $S_K(t_1 - t_2) = \langle \{ \hat{X}(t_1), \hat{X}(t_2) \} \rangle$ . Как связаны  $S_K(\omega)$  и  $J(\omega)$ ?
3. Продемонстрируйте эти соотношения на примере исследуемого в семинаре «шума»  $\hat{X}(t) = \sum_n \lambda_n (\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger)$ .

## Задача 2. Релаксация (20 баллов)

Полученное на семинаре время релаксации  $T_1$  для спин-бозонной модели, описываемой гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x \sum_n \lambda_n \hat{X}_n, \quad \hat{X}_n = a_n + a_n^\dagger, \quad (2)$$

можно просто интерпретировать на языке золотого правила Ферми.

1. Считая, что все осцилляторы находятся в квантовом состоянии с фиксированными числами заполнения  $n_k$ , вычислите частоту переходов  $w_{i \rightarrow f} = w_{\uparrow \rightarrow \downarrow}$  и  $w_{\downarrow \rightarrow \uparrow}$ .
2. Проведите усреднение полученных величин по Гиббсовскому ансамблю для осцилляторов  $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$ .

## Задача 3. Чистая дефазировка (50 баллов)

Исследуйте эволюцию матрицы плотности двухуровневой системы, взаимодействующую с резервуаром (набором осцилляторов). Система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_n \omega_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2}) + \hat{\sigma}_z \sum_n \lambda_n \hat{X}_n, \quad \hat{X}_n = \hat{b}_n + \hat{b}_n^\dagger \quad (3)$$

1. Перейдите к представлению взаимодействия. Оператор эволюции в представлении взаимодействия записывается при помощи  $\mathcal{T}$ -упорядоченной экспоненты:

$$\hat{S}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left( -i \int_{t_0}^t \hat{V}(\tau) d\tau \right) \quad (4)$$

Гамильтониан в различные моменты времени не коммутирует сам с собой, поэтому  $\mathcal{T}$ -упорядочение убрать нельзя. Однако задачу можно значительно упростить, используя тот факт, что гамильтониан в различные моменты времени коммутирует на число:

$$[\hat{V}(t_1), \hat{V}(t_2)] = i\phi(t_1 - t_2) \quad (5)$$

Используя этот факт, покажите, что знак  $\mathcal{T}$ -упорядочения можно снять ценой дополнительной добавки:

$$\hat{S}(t, t_0) = e^{i\Phi(t-t_0)} \exp \left( -i \int_{t_0}^t \hat{V}(\tau) d\tau \right) \quad (6)$$

Найдите функцию  $\Phi(t, t_0)$ . Для этого вам может пригодиться формула **Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа**:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right), \quad [\hat{A}, \hat{B}] = \text{const} \quad (7)$$

2. Пусть в начальный момент времени  $t_0 = 0$  матрица плотности системы имела вид  $\hat{\rho}_{tot}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0) \otimes \hat{\rho}_e(t_0)$ , и резервуар находится в равновесии при температуре  $T$ :  $\hat{\rho}_e(t_0) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0^{(e)}}$ . Вычислите редуцированную матрицу плотности в произвольный момент времени:

$$\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_e\left(\hat{S}(t, t_0)\hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_e\hat{S}(t_0, t)\right) \quad (8)$$

Для этого вам может пригодиться базис когерентных состояний осциллятора (смотри задачи к семинару 2 прошлого семестра).

3. Поскольку величина  $\hat{\sigma}_z$  в данной задаче коммутирует с гамильтонианом, никакой релаксации наблюдаться не будет. Поэтому вся динамика сведётся к следующей временной зависимости матрицы плотности:

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \cdot \exp(-\Gamma(t)) \\ \rho_{21} \cdot \exp(-\Gamma(t)) & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Найдите выражение для функции декогеренции  $\Gamma(t)$ .

#### Задача 4 (15 баллов)

Используя функцию декогеренции из предыдущей задачи:

$$\Gamma(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth \frac{\omega}{2T} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}, \quad (10)$$

исследуйте декогеренцию для омической бани, с модельной функцией  $J(\omega) = \pi \alpha \omega e^{-\omega/\omega_c}$ . Тут  $\omega_c$  выступает в роли экспоненциальной ультрафиолетовой обрезки, и можно считать  $\omega_c \gg T$ .

*Указание:* для вычисления удобно отделить вклад чисто квантовых флуктуаций (при  $T = 0$ ), который зависит от обрезки  $\omega_c$ ; а затем найти «температурный» вклад, для которого обрезку уже можно выбросить.