

Задачи к семинару «Модель Калдейры-Леггетта»

28 февраля 2018 г.

Задача 1. Модель Рубина (это фамилия) (25 баллов)

Рассмотрите тяжёлую частицу массы M , которая соединена с баней, моделируемой одномерным полубесконечным кристаллом. В гармоническом приближении, система описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} + V(\hat{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n)^2 \right) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{X} - \hat{u}_1)^2 \quad (1)$$

Вычислите явный вид спектральной плотности $J(\omega)$, а также вид «диссипативного» ядра $\gamma(t)$.

Задача 2. Кинетическое уравнение (45 баллов)

В рамках приближения Борна-Маркова выведите уравнение на координатную матрицу плотности $\rho(x, x', t) = \langle x | \hat{\rho}(t) | x' \rangle$ в модели Калдейры-Леггетта с омической баней¹

Задача 3. Расплывание волнового пакета (что, опять?) (30 баллов)

Упражнение. Преамбула (5 баллов) Как известно из квантовой механики, волновые пакеты имеют обыкновение расплываться. С другой стороны, как известно, электрон имеет массу $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г, и его «классический радиус» $x_0 \simeq 10^{-13}$ см (определяемый как его комптоновская длина волны). Пусть в начальный момент времени электрон представлял собой ровно такой волновой пакет:

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} x_0^{1/2}} e^{-x^2/2x_0^2} \quad (2)$$

Найдите его ширину через время $t = 1 \mu\text{s}$.

Задача (25 баллов) В предыдущем упражнении вы должны были получить ответ, который должен был вас удивить и насторожить. Рассмотрите теперь движение свободного электрона ($V_{\text{eff}}(X) = 0$), взаимодействующего с окружающей средой в рамках модели Калдейры-Леггетта с омической баней. Определите расплывание такого волнового пакета $\langle \hat{x}^2(t) \rangle$ на больших временах в следующих двух случаях:

- (10 баллов) случай высоких температур $T \gg \omega_c$
- (10 баллов) случай низких температур $T = 0$

(5 баллов) Кроме этого, найдите и оцените численно момент времени, за которое происходит нарушение когерентности и переход из квантового режима в классический. Для численной оценки можете рассмотреть какой-нибудь из известных полупроводников при комнатной температуре — для чего величину вязкости η полезно будет связать с подвижностью μ , которую можно найти в справочной литературе.

¹ Данное уравнение, после преобразования Вигнера, является квантомеханическим обобщением уравнения Фоккера-Планка