

Функциональный интеграл

28 марта 2018 г.

Запаздывающая функция Грина

В данном семинаре мы построим представление запаздывающего пропагатора — амплитуды распространения квантомеханической частицы из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{y}$ за время T через функциональный интеграл:

$$G^R(x, y, T > 0) \equiv \langle y | \hat{U}(T) | x \rangle \quad (1)$$

Временная дискретизация и оператор эволюции

Для удобства предположим, что в гамильтониане импульс и координата разделяются; тем самым, гамильтониан имеет вид $H(x, p) = K(p) + V(x)$ (кинетическая и потенциальные энергии)¹. Разобьём отрезок времени длины T на $N \rightarrow \infty$ одинаковых кусочков размера $\epsilon = \frac{T}{N} \rightarrow 0$, и представим оператор эволюции в виде $\hat{U}(T) = \prod_{i=1}^N \hat{U}(\epsilon)$. В свою очередь, эволюцию на бесконечно малое время ϵ можно записать в виде² $\hat{U}(\epsilon \rightarrow 0) = e^{-i\hat{H}\epsilon} \simeq e^{-i\hat{V}\epsilon} e^{-i\hat{K}\epsilon}$. Тем самым, мы получаем выражение для оператора эволюции в виде произведения $2N$ множителей. Удобно каждому из них «приписать» своё время $t_k = k\epsilon$ (оно было бы, если бы мы рассматривали гамильтониан, зависящий от времени):

$$\hat{U}(t) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \underbrace{e^{-i\hat{V}\epsilon} e^{-i\hat{K}\epsilon}}_{t=t_N=T} \dots \underbrace{e^{-i\hat{V}\epsilon} e^{-i\hat{K}\epsilon}}_{t=t_1=0}$$

Вставим после каждого члена $e^{-i\hat{K}\epsilon}$ (при $t = t_k$) единицу в виде разложения по координатному базису $\hat{\mathbb{I}} = \int d\mathbf{x}_k |\mathbf{x}_k\rangle \langle \mathbf{x}_k|$, а после членов $e^{-i\hat{V}\epsilon}$ — по импульсному $\hat{\mathbb{I}} = \int (d\mathbf{p}_k) |\mathbf{p}_k\rangle \langle \mathbf{p}_k|$

$$G^R(x, y, t > 0) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \int \prod_{k=1}^N (d\mathbf{p}_k) \underbrace{\langle \mathbf{x}_N = \mathbf{y} | e^{-i\hat{V}\epsilon} | \mathbf{p}_N \rangle \langle \mathbf{p}_N | e^{-i\hat{K}\epsilon} | \mathbf{x}_{N-1} \rangle}_{t=t_N} \dots \underbrace{\langle \mathbf{x}_1 | e^{-i\hat{V}\epsilon} | \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_1 | e^{-i\hat{K}\epsilon} | \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \rangle}_{t=t_1} \quad (2)$$

Поскольку операторы $e^{-i\hat{V}\epsilon}$ — собственные для координаты, а $e^{-i\hat{K}\epsilon}$ — для импульса, то блоки вычисляются согласно:

$$\langle \mathbf{x}_k | e^{-i\hat{V}\epsilon} | \mathbf{p}_k \rangle \langle \mathbf{p}_k | e^{-i\hat{K}\epsilon} | \mathbf{x}_{k-1} \rangle = e^{-iV(\mathbf{x}_k)\epsilon} e^{i\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k} e^{-iK(\mathbf{p}_k)\epsilon} e^{-i\mathbf{p}_k \mathbf{x}_{k-1}} \quad (3)$$

Собирая аккуратно члены, мы приходим к выражению:

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t > 0) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \int \prod_{k=1}^N (d\mathbf{p}_k) \exp \left(i\epsilon \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} - H(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) \right) \right) \quad (4)$$

Функциональный интеграл

В пределе $N \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow 0$, набор величин $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^N$ и $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N$ можно представлять в виде функций уже непрерывного параметра — времени t , так что $\mathbf{x}(t_k = \epsilon k) = \mathbf{x}_k$ (и аналогично с импульсом). Поскольку $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$ — фиксированы, и по ним не происходит интегрирование, то для соответствующих функций это значит $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}(t=T) = \mathbf{y}$. Для импульсов никакого такого требования нет.

Забудем на время, что построенные таким образом функции $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$, вообще говоря, чаще всего будут оказываться недифференцируемы. В таком случае в экспоненте стоит конечная аппроксимация интеграла, представляющего собой классическое действие $S[x(t), p(t)]$, записанное в гамильтоновом формализме:

¹Случай общего положения — неразделяемый гамильтониан — разбирается в ПШ, глава 9.1 «Интеграл по путям в квантовой механике», стр. 277. В этом случае всё рассказанное тоже будет верно, просто гамильтониан нужно брать упорядоченным по Вейлю

²Согласно формуле Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа (Baker-Campbell-Hausdorff formula), $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\dots}$; тем самым поправки к этому выражению пропорциональны $[\hat{V}\epsilon, \hat{K}\epsilon] \propto \epsilon^2$, то есть вымирают в пределе $\epsilon \rightarrow 0$

$$S[x(t), p(t)] = \int_0^T dt (p(t)\dot{x}(t) - H(x(t), p(t)))$$

Интегрирование по набору промежуточных координат и импульсов записывается через формальный символ “интегрирования по всем функциям”; понимать его пока нужно исключительно в смысле временной и пространственной дискретизации:

$$\int \mathcal{D}[x(t)] \equiv \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k, \quad \int \mathcal{D}[p(t)] \equiv \int \prod_{k=1}^N (d\mathbf{p}_k) \quad (5)$$

Наконец, поскольку в нашем построении $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$, то интегрирование происходит с так называемыми “закреплёнными концами” (то есть с условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}(T) = \mathbf{y}$). Тем самым, с учётом определения “меры функционального интеграла” (5), мы получаем представление запаздывающего пропагатора через функциональный интеграл:

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T > 0) = \int_{\substack{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(T)=\mathbf{y}}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)] e^{iS[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)]} \quad (6)$$

Взятие интеграла по импульсам Обратим внимание, для обычной нерелятивистской частицы кинетическая энергия имеет вид $K(p) = \frac{p^2}{2m}$. Это позволяет нам взять интегралы по p_k в выражении (4), поскольку они все гауссовы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d\mathbf{p}_k) \exp \left(i\epsilon \left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} - \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m} \right) \right) = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon} \right)^{d/2} \exp \left(i\epsilon \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} \right)^2 \right) \quad (7)$$

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t > 0) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon} \right)^{Nd/2} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mathbf{x}_k \exp \left(i\epsilon \sum_{k=1}^N \left(\frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}_k) \right) \right) \quad (8)$$

Если в этом случае модифицировать “меру” согласно $\mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \equiv \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon} \right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int d\mathbf{x}_k$, и заметить, что в экспоненте стоит аппроксимация классического действия в лагранжевом формализме — $S[\mathbf{x}(t)] = \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) \right)$, то мы придём к альтернативному представлению пропагатора через другой функциональный интеграл:

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, T > 0) = \int_{\substack{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(T)=\mathbf{y}}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] e^{iS[\mathbf{x}(t)]} \quad (9)$$

Такое же выражение можно было бы получить на функциональном языке, «взяв» гауссов интеграл по импульсам согласно:

$$\int \mathcal{D}[\mathbf{p}(t)] \exp \left(-i \int dt \frac{(\mathbf{p}(t) - m\dot{\mathbf{x}}(t))^2}{2m} \right) = 1 \quad (10)$$

(в действительности это не единица, а некоторая бесконечная константа — которую мы «спрятали» в переопределение меры $\mathcal{D}[\mathbf{x}(t)]$). Обратим внимание на следующие вещи. Во-первых, исходное представление (через интеграл по импульсам и координатам) в каком-то смысле более фундаментально; альтернативное представление работает только в случае квадратичной зависимости кинетической энергии от импульса. Во-вторых, в исходном представлении “мера” определялась приятней, чем в альтернативном; в ней не было неприятных зависимостей от масс и дискретизации ϵ .

У выражения для амплитуды перехода (пропагатора) через функциональный интеграл имеется прозрачный физический смысл. Квантовая частица из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{y}$ может попасть каким угодно путём — по произвольной траектории, соединяющий эти две точки. При этом каждый путь имеет “вес” e^{iS} . Результирующая амплитуда складывается за счёт интерференции по всем траекториям.

Вообще говоря, каждый раз, когда пишется функциональный интеграл, нужно подразумевать, как именно следует “расшифровывать” меру $\mathcal{D}[\mathbf{x}(t)]$; как мы видим, бывают разные варианты. Чаще, однако, это опускают. Два определения меры, которые мы тут получили, отличаются всего лишь на константу (хоть и бесконечную, и зависящую явно от дискретизации) — однако, что существенно, они совершенно не зависят от самой траектории $\mathbf{x}_k$ (или, альтернативно, $\mathbf{x}(t)$). В практически всех приложениях мы будем иметь дело с выражениями, в которых имеется отношение двух разных функциональных интегралов, в которых эта константа благополучно сокращается и, вообще говоря, может быть выбрана произвольной. В таких (и только таких!) случаях можно себе позволить опускать “расшифровку” меры функционального интегрирования.

Свойства функционального интеграла

- Имея «кратный функциональный интеграл» $\int \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \mathcal{D}[\mathbf{p}(t)] \dots$, можно переходить к «повторному» $\int \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \dots \int \mathcal{D}[\mathbf{p}(t)]$.
- В функциональном интеграле можно сдвигать интеграл на константу³ $\int \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \cdot I[\mathbf{x}(t)] = \int \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \cdot I[\mathbf{x}(t) - \mathbf{f}(t)]$ для произвольной функции $\mathbf{f}(t)$. Условно говоря, якобиан такого преобразования равен единице.
- Наконец, функциональный интеграл можно «сшивать»:

$$\int_{\substack{\mathbf{x}_1(t_a)=\mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_1(t)=\mathbf{y}}} d\mathbf{y} \int_{\substack{\mathbf{x}_2(t)=\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2(t_b)=\mathbf{x}_b}} \mathcal{D}[\mathbf{x}_1(t)] \int_{\substack{\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_b}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \equiv \int_{\substack{\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_b}} \mathcal{D}[\mathbf{x}(t)] \quad (11)$$

Это же явно следует из определения пропагатора: $\int d\mathbf{y} \langle \mathbf{x}_b | \hat{U}(t_b, t) | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \hat{U}(t, t_a) | \mathbf{x}_a \rangle \equiv \langle \mathbf{x}_b | \hat{U}(t_b, t_a) | \mathbf{x}_a \rangle$. Остальные свойства тривиально следуют из нашего определения функционального интеграла через дискретизацию.

Квантовый гармонический осциллятор

Давайте вычислим функциональный интеграл для пропагатора квантового гармонического осциллятора: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$. Изложенный тут рецепт тривиально обобщается на произвольные функциональные интегралы. Во-первых: мы не хотим иметь дело с мерой функционального интеграла, которая как правило содержит бесконечную константу, зависящую от дискретизации. Стандартный трюк для того, чтобы от неё избавиться — это рассмотреть отношение функциональных интегралов; например, пропагатора осциллятора и пропагатора свободной частицы, который нам известен:

$$\frac{G_R(x, y, T)}{G_R^{(0)}(x - y, T)} = \frac{\int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left(i \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right] dt \right)}{\int_{x(0)=y}^{x(T)=x} \mathcal{D}[x(t)] \exp \left(i \int_0^T \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right)} \quad (12)$$

В таком случае, покуда мера в числителе и знаменателе выбрана одинаковой, эта константа нас волновать не должна. Во-вторых: мы имеем дело с гауссовым функциональным интегралом — действие квадратично по $x(t)$, и его можно записать в виде

$$S[x(t)] = \frac{m}{2} \int x(t) \cdot \hat{L}x(t) dt \quad (13)$$

с линейным оператором $\hat{L} = -\partial_t^2 - \omega^2$. Этот линейный оператор определяет классические уравнения движения: $\hat{L}x_{cl}(t) = 0$. Давайте найдём классическую траекторию, которая удовлетворяет нашим граничным условиям $x_{cl}(0) = y$ и $x_{cl}(T) = x$, и сделаем подстановку в функциональный интеграл $x(t) = x_{cl}(t) + z(t)$. В таком случае мы будем иметь дело с интегралом по всем функциям $z(t)$, но которые уже будут удовлетворять нулевым граничным условиям. Сдвигка же приведёт к добавке к действию (это верно только потому, что действие квадратично, а траектория x_{cl} удовлетворяет классическим уравнениям движения):

$$S[x_{cl}(t) + z(t)] = S_{cl} + S[z(t)] \quad (14)$$

Для действия записанного в виде $S[x(t)] = \frac{m}{2} \int x(t) \hat{L}x(t) dt$ может показаться, что $S[x_{cl}(t)] = 0$ в силу $\hat{L}x_{cl}(t) = 0$; что, конечно, не так — для того, чтобы привести действие к необходимому виду, мы проинтегрировали по частям, и для классической траектории внеинтегральный член отличен от нуля. Для траектории $z(t)$ с нулевыми граничными условиями внеинтегральный член очевидным образом равен нулю. В частности, для свободной частицы классическая траектория соответствует частице, летящей равномерно и прямолинейно $x(t) = y + \frac{x-y}{T}t$, и действие на такой траектории равно $S_{cl} = \frac{m(x-y)^2}{2T}$. Благодаря этому свойству мы можем искать только пропагатор при $x = y = 0$, что в данной задаче проще:

$$G_R(x, y, T) = G_R(0, 0, T) e^{iS_{cl}(x, y, T)} \quad (15)$$

(опять-же, для классической частицы это свойство очевидным образом выполняется). Наконец, последний шаг — произвольную функцию $z(t)$ можно разложить по базису собственных функций оператора $\hat{L}$, который для осциллятора выглядит следующим образом:

$$z(t) = \sum_n c_n z_n(t) \quad (16)$$

$$\hat{L}z_n(t) = \lambda_n z_n(t), \quad z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi n t}{T}, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \quad (17)$$

Меру функционального интеграла можно в таком случае выбрать в следующем виде: $\int \mathcal{D}[z(t)] \equiv \mathcal{N} \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dc_n$ (с бесконечной константой $\mathcal{N}$, одинаковой для числителя и знаменателя). Очевидно, что при этом мы действительно учтём

³Менее тривиальные замены координат могут потребовать вычисления якобиана соответствующего перехода. Конкретный вид якобиана можно построить, выяснив, как будет выглядеть его дискретный аналог

все функции по одному разу; менее очевидно, но тоже верно, что эта замена — просто замена базиса, она даётся ортогональной матрицей (в дискретном случае), и якобиан такого перехода будет единичным. Наконец, в силу ортонормированности набора $z_n(t)$ мы немедленно замечаем, что действие факторизуется:

$$S[\sum_n c_n z_n(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} \lambda_n c_n^2 \quad (18)$$

Поэтому мы можем записать (записывая явно бесконечную константу, связанную с мер

$$G_R(0, 0, T) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} dc_n \exp\left(i \frac{m}{2} \lambda_n c_n^2\right) = \mathcal{N} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi i}{m \left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2\right)}} \quad (19)$$

Наконец, заметив, что знаменатель равен числителю с $\omega = 0$, мы получаем, что все «лишние» константы сокращаются и остаётся следующее соотношение:

$$\frac{G_R(0, 0, T)}{G_R^{(0)}(0, T)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2 \pi^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega T}{\sin \omega T}} \quad (20)$$

Вычисление такого бесконечного произведения — отдельная задача; при этом оно хорошо определено, поскольку при $n \rightarrow \infty$ члены стремятся к единице. Можно, например, заметить, что функция в левой и правой части обращается в ноль при $\omega T = \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и что при $\omega T = 0$ она равна единице. Это не является доказательством этого тождества, но является мнемоническим правилом, позволяющим его запомнить. Таким образом, мы получаем:

$$G_R(0, 0, T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T}} \quad (21)$$

(зависимость от координат восстанавливается добавлением классического действия).

Спектр

Из знания запаздывающего пропагатора можно извлечь, например, спектр гамильтониана. Для этого его можно явно вычислить в базисе собственных функций гамильтониана:

$$G_R(x, y, T) = \langle x | e^{-i\hat{H}T} | y \rangle = \sum_n \langle x | n \rangle e^{-iE_n T} \langle n | y \rangle = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) e^{-iE_n T} \quad (22)$$

Полученный пропагатор тоже можно представить в таком виде. Действительно:

$$G_R(0, 0, T) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} e^{-i\omega T/2} (1 - e^{-2i\omega T})^{-1/2} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{-1/2}^n e^{-i\omega T(2n+1/2)} \quad (23)$$

и мы получили часть спектра — $E_{2n} = \omega(2n + \frac{1}{2})$. Можно задаться резонным вопросом — куда же делась половина спектра? Ответ прост: дело в том, что пропагатор $G_R(0, 0, T)$ пропорционален волновым функциям в нуле $\psi_n(0)$; а для функций с нечётным n это значение равно нулю, поскольку они сами нечётны. Для того, чтобы получить весь спектр, было бы правильно рассмотреть следующую величину:

$$\int dx G_R(x, x, T) = \sum_n e^{-iE_n T} \quad (24)$$

Эквивалентность интеграла по траекториям и уравнения Шрёдингера

Наконец, обсудим вопрос о том, как из интеграла по траекториям можно было бы в обратную сторону вывести уравнение Шрёдингера. Для этого рассмотрим эволюцию на бесконечно малое время ϵ , и запишем:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \langle x | \hat{U}(\epsilon) | \psi(t) \rangle = \int d\eta \langle x | \hat{U}(\epsilon) | x + \eta \rangle \psi(x + \eta, t) \quad (25)$$

Для пропагатора на бесконечно малое время мы можем воспользоваться видом через функциональный интеграл (тут мы восстановили $\hbar$):

$$\langle x | \hat{U}(\epsilon) | x + \eta \rangle = \int_{x(t)=x+\eta}^{x(t+\epsilon)=x} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dt \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x(t))\right]\right) \approx \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m\eta^2}{2\epsilon} - \epsilon V(x)\right)\right) \quad (26)$$

В силу малости ϵ , член с потенциальной энергией можно разложить $e^{-i\epsilon V(x)/\hbar} \approx 1 - i\epsilon V(x)/\hbar$. По η происходит интегрирование, и множитель $\exp\left(\frac{im\eta^2}{2\epsilon\hbar}\right)$ говорит, что типичные значения $\eta \propto \sqrt{\epsilon}$. Поэтому подынтегральную волновую функцию можно разложить в ряд по ϵ , оставив первые три члена:

$$\psi(x + \eta, t) \approx \psi(x, t) + \eta \partial_x \psi(x, t) + \frac{1}{2} \eta^2 \partial_x^2 \psi(x, t) \quad (27)$$

После такого разложения, можно явно проинтегрировать по η и получить:

$$\int d\eta \cdot e^{im\eta^2/2\epsilon\hbar} \psi(x + \eta, t) \approx \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m}} \left[1 + i\epsilon \frac{\hbar}{2m} \partial_x^2 \right] \psi(x, t) \quad (28)$$

Поскольку при $\epsilon = 0$ очевидным образом должно иметь место тождество, мы заключаем, что $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}$ (что, впрочем, известно и из дискретного представления для функционального интеграла (8)). Собирая ведущие по ϵ члены, мы получаем:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x) + i\epsilon \frac{\hbar}{2m} \partial_x^2 \right) \psi(x, t), \quad (29)$$

Наконец, заменяя $\frac{\psi(x, t+\epsilon) - \psi(x, t)}{\epsilon} \simeq \partial_t \psi(x, t)$, мы немедленно воспроизводим уравнение Шрёдингера:

$$i\partial_t \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) \quad (30)$$

Данный пример был достаточно академичен, и ничего нового нам не дал. Однако, например, для диффузии (или, более общо — классической частицы, движущийся в вязкой среде под действием случайных Ланжевеновских сил) представление через функциональный интеграл строится достаточно просто и прямолинейно. Подобным преобразованием можно вывести, например, уравнение Фоккера-Планка для функции распределения $P(x, t)$.