Инстантоны и туннелирование

4 апреля 2018 г.

Постановка задачи

На данном семинаре мы будем искать туннельное расщепление в двухъямном потенциале. Для удобства мы положим массу частицы $m = 1$, а потенциал зададим в виде $U(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$[1], и тем самым Гамильтониан задачи имеет следующий вид:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \lambda(x^2 - \eta^2)^2 \tag{1}$$

Потенциал имеет пару минимумов в точках $x = \pm\eta$, вблизи которых он имеет осцилляторное разложение $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, с частотами $\omega^2 = 8\lambda\eta^2$. Высота барьера, разделяющего эти две ямы, равна $U(0) = \lambda\eta^4$; поэтому квазиклассическому приближению соответствует $\lambda\eta^6 \gg 1 \Leftrightarrow \omega\eta^2 \gg 1$. Именно в таком приближении мы и будем решать эту задачу. На самом деле, её мы уже обсуждали в семинаре, посвящённому квазиклассическому приближению; в частности, мы вычисляли расщепление n-того осцилляторного уровня (на симметричные и антисимметричные комбинации). Квазиклассическое приближение, впрочем, работает только при $n \gg 1$; а сейчас мы сфокусируемся на расщеплении основного состояния $n = 0$. Для вычисления, мы воспользуемся слегка модифицированным аппаратом функций Грина, и функциональным интегралом.

Виковский поворот и Евклидово действие

Удобнее всего исследовать свойства основного состояния в мнимом времени $t = -i\tau$[2]. Функцию Грина во мнимом времени мы будем обозначать следующим образом[3]:

$$G_E(x, y, \tau) \equiv G(x, y, -i\tau) = \langle x| e^{-\hat{H}\tau} |y\rangle = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(y)e^{-E_n\tau} \tag{2}$$

Обратим внимание, что чем выше возбуждение, тем меньший вклад оно даёт в эту сумму. Поэтому, в принципе, если рассмотреть $\tau = \beta \to +\infty$, то главный вклад останется только от основного (и, в нашем случае — первого возбуждённого) состояния. Именно этот случай мы и будем исследовать.

Для Евклидовой функции Грина можно вывести представление через функциональный интеграл, полностью эквивалентно тому, что мы делали на предыдущем семинаре. Ответ, в действительности, будет таким же, как если бы мы попросту в действие сделали формальную подстановку $t = -i\tau$. При этом:

$$iS[x(t)] = i\int\left[\frac{1}{2}(\partial_t x)^2 - U(x(t))\right]dt = -\int\left[\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + U(x(\tau))\right]d\tau \equiv -S_E[x(\tau)] \tag{3}$$

$$\boxed{G_E(x, y, \beta) = \int_{x(-\beta/2)=y}^{x(\beta/2)=x} \mathcal{D}x(\tau)\exp\left(-\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau\left[\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + U(x(\tau))\right]\right)} \tag{4}$$

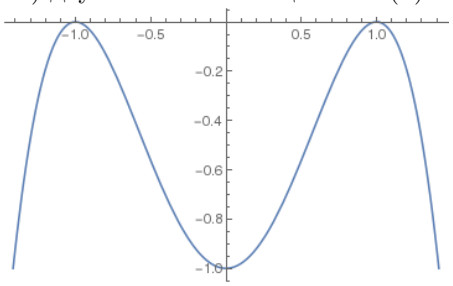
Последнее называют «Евклидовым действием», и, как мы видим, оно отличается от обычного только изменением знака у потенциала $U(x)$ — тем самым, с классической точки зрения оно описывает движение в перевёрнутом потенциале. В дальнейшем нижний индекс «E» мы будем опускать, помня, что мы отныне работаем в мнимом времени.

[1] Именно такие обозначения приняты в «Инстантонной азбуке»

[2] Такой поворот в комплексную плоскость времени называют Виковским, или «Евклидовым». Последнее чаще используется в контексте релятивистской квантовой теории поля — дело в том, что после такого поворота метрика Минковского $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, задаваемая через интервал $ds^2 = dt^2 - d\boldsymbol{r}^2$, превращается в Евклидову метрику $\delta_{\mu\nu}$ (с точностью до знака) $ds^2 = -(d\tau^2 + d\boldsymbol{r}^2)$.

[3] D действительности же, для мнимого времени $\tau = \beta = T^{-1}$ это попросту соответствует координатной матрице плотности

Рис. 1: Первёрнутый («евклидов») двухъямный потенциал $-U(x)$. Оси в единицах η (Ox) и λ (Oy)



Метод перевала

Поскольку $U(x)$ представляет собой полином четвёртой степени, мы имеем дело с нелинейным действием и с негауссовым функциональным интегралом. Брать этот интеграл мы будем методом перевала, который соответствует нахождению *классических* траекторий, минимизирующих действие — и квадратичному разложению вблизи них. Две тривиальных классических траектории очевидны — они соответствуют покоящимся частицам в точках $x(t) = \pm\eta$. Действие на них равно нулю, а квадратичное разложение устроено так же, как и для квантового гармонического осциллятора; и они дадут соответствующий вклад в следующие функции Грина в совпадающих точках, связанной с посчитанной на предыдущем семинаре функцией Грина квантового гармонического осциллятора $G_0(\beta)$ (с массой $m = 1$):

$$G^{(0)}(\eta, \eta, \beta) = G^{(0)}(-\eta, -\eta, \beta) \simeq G_0(\beta) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh(\beta\omega)}} \approx \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\beta\omega/2} \tag{5}$$

Из этого мы действительно видим, что в ведущем приближении имеется (двукратно вырожденный) осцилляторный уровень энергии $E = \omega/2$; но это не то, что нас интересует — нас интересует туннельное расщепление! Туннелированию соответствует переход из левой ямы в правую, поэтому именно такую функцию Грина мы будем считать: $G_E(\eta, -\eta, \beta)$.

Логика

Давайте вспомним, как мы берём многомерные интегралы методом перевала $I = \int \exp(-f(\boldsymbol{x}))d^d\boldsymbol{x}$. Рецепт прост: мы сперва мы ищем максимум, решая седловое уравнение (или систему уравнений) $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = 0$ — и находя решение, точку $\boldsymbol{x}_0$. В ведущем приближении, значение интеграла даётся значением функции в этой точке: $I \approx \exp(-f(\boldsymbol{x}_0))$. Затем мы рассматриваем квадратичное разложение вблизи седловой точки: $f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}) \approx f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j$; и, наконец, берём гауссов интеграл:

$$I \approx e^{-f(\boldsymbol{x}_0)} \int d^d\boldsymbol{z} \exp\left(-\frac{1}{2} L_{ij} z_i z_j\right) = \frac{1}{\sqrt{\det \frac{\hat{L}}{2\pi}}} e^{-f(\boldsymbol{x}_0)} \tag{6}$$

Функциональный интеграл в этом смысле ничем не отличается — и мы применим этот рецепт и тут.

Седло

Итак, нам нужно найти классическую траекторию $x_{cl}(\tau)$, удовлетворяющую экстремуму действия с граничными условиями $x(-\beta/2) = -\eta$ и $x(\beta/2) = \eta$:

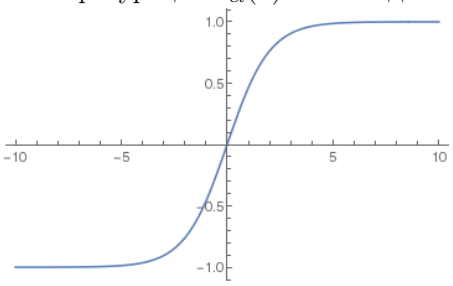
$$\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)} = 0 \Rightarrow \partial_\tau^2 x = U'(x(\tau)) \tag{7}$$

Данное уравнение можно решить в квадратурах, но проще всего решение устроено, если тут сразу взять предел $\beta \to \infty$. В таком случае, траектории соответствует перекатывающаяся за бесконечное время частица из левого «горба» перевёрнутого потенциала на правый. Чтобы найти эту траекторию, можно воспользоваться законом сохранения «энергии» $E = \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 - U(x(\tau)) = \text{const}$ (на нашей траектории $E = 0$), благодаря чему понизить степень уравнения до первой:

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 = U(x(\tau)) \Rightarrow \frac{dx}{x^2 - \eta^2} = \sqrt{2\lambda} d\tau \Rightarrow \boxed{x_{cl}(\tau) = \eta \tanh \frac{\omega\tau}{2}} \tag{8}$$

Такую траекторию — нетривиальный экстремум нелинейного действия в функциональном интеграле — называют *инстантоном.*

Рис. 2: Инстантонная конфигурация $x_{cl}(\tau)$. Оси в единицах ω (Ox) и η (Oy)



Тут мы сталкиваемся с важной особенностью задачи. Вместо одной седловой траектории, мы, в действительности, имеем дело с целым *седловым многообразием* $x_{cl}(\tau - \tau_c)$, параметризуемым вещественным числом τ_c — положением инстантона. Наличие этой свободны, конечно, связано с трансляционной инвариантностью по времени — мы ведь взяли предел $\beta \to \infty$! Инстантон имеет характерную ширину $\sim \omega^{-1}$, которая мала (в частности, $\omega^{-1} \ll \beta$), и поэтому краевые эффекты, связанные с удержанием конечного β, будут экспоненциально малы на фоне основного результата, и в ведущем порядке они действительно не важны. Величина же τ_c с этой же точностью может пробегать все значения $\tau_c \in (-\beta/2, \beta/2)$. К этой свободе выбора центра инстантона мы ещё вернёмся, а пока давайте рассмотрим одно седло на этом многообразии, скажем, $\tau_c = 0$.

Итак, в главном порядке значение интеграла определяется действием на этом инстантоне. Давайте его вычислим (для этого удобно воспользоваться «законом сохранения энергии» и выразить член с потенциальной энергией через кинетическую):

$$\boxed{S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\partial_\tau x_{cl})^2 = \frac{2}{3}\omega\eta^2} \gg 1 \tag{9}$$

Несложно убедиться, что это действие тождественно совпадает с «квазиклассическим действием» $\int_{-\eta}^{\eta} p(x)dx$, которое определяло бы расщепление в квазиклассическом приближении.

Квадратичное разложение

Следуя логике метода перевала, нам нужно провести квадратичное разложение вблизи инстантона:

$$S_E[x_{cl}(\tau) + z(\tau)] \approx S_0 + \frac{1}{2}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[(\partial_\tau z)^2 + U''(x_{cl}(\tau))z^2(\tau)\right] \equiv S_0 + S_2[z(\tau)] \tag{10}$$

В квадратичном разложении действия стоит линейный оператор $\hat{L} = -\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau))$, спектр которого нам предстоит исследовать при взятии гауссового интеграла по квадратичным флуктуациям. Ответ тем самым с точки зрения метода перевала устроен следующим образом:

$$G(\eta, -\eta, \beta) \approx e^{-S_0} \int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] e^{-S_2[z(\tau)]} \tag{11}$$

Явный вид оператора следующий:

$$U''(x_{cl}(\tau)) = \frac{\omega^2}{2}(3\tanh^2\frac{\omega\tau}{2} - 1) = \omega^2\left(1 - \frac{3/2}{\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}\right) \tag{12}$$

Спектр оператора

Итак, для взятия гауссового интеграла по $z(\tau)$ нам необходимо исследовать свойства (спектр) оператора $-\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau))$. Задача на его собственные значения ϵ_n и собственные функции $\psi_n(\tau)$ выглядит следующим образом:

$$\left(-\partial_\tau^2 - \frac{3\omega^2/2}{\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}\right)\psi_n(\tau) = (\epsilon_n - \omega^2)\psi_n(\tau) \tag{13}$$

Данное уравнение выглядит в точности как уравнение Шрёдингера в потенциале $\frac{1}{\cosh^2 x}$, решение которого нам известно — оно выражается через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$, и мы его обсуждали на четвёртом семинаре прошлого семестра. Воспользуемся ответами из того семинара, в которые нужно подставить следующие значения параметров:

$$m = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{2}{\omega}, \quad U_0 = \frac{3\omega^2}{2} \tag{14}$$

Важным для исследования потенциала оказываются следующие два безразмерных параметра:

$$u = \frac{U_0}{1/2ma^2} = 6, \quad s = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4u} - 1) = 2 \tag{15}$$

Дискретный спектр Как мы помним, число s характеризует количество связанных состояний. Для энергий $E_n \equiv \epsilon_n - \omega^2$ работает следующая формула:

$$E_n = -\frac{(s-n)^2}{2ma^2} = -\frac{\omega^2}{4}(s-n)^2 \Rightarrow \epsilon_n = \omega^2 + E_n = \boxed{\begin{cases} \epsilon_0 & = 0 \\ \epsilon_1 & = \frac{3}{4}\omega^2 \end{cases}} \tag{16}$$

(число $n = 0, 1, \dots$ и $n < s$). Кроме того, целые числа s соответствуют случаю *возникновению* в яме связанного состояния (что означает, что есть состояния со строго нулевой энергией $E = 0$, которое, тем не менее, уже относится к непрерывному спектру).

Нулевая мода Обратим внимание — в задаче имеется нулевая мода $\epsilon_0 = 0$, соответствующая основному состоянию на языке квантовой механики. Его «волновая функция» тоже выписывалась на семинаре, и она выглядит как (константа C_0 обеспечит нормировку на единицу; $s = 2$):

$$\psi_0(\tau) = \frac{C_0}{\cosh^s \frac{\omega\tau}{2}} \tag{17}$$

В действительности же, наличие нулевой моды, как мы сказали выше, связано с свободой выбора центра инстантона. Это утверждение можно формализовать: $S[x_{cl}(\tau)] \equiv S[x_{cl}(\tau + \delta\tau)]$, поэтому инфинитезимальная $\delta\tau$ соответствует «приращению» $z(\tau) = \delta\tau \frac{\partial x_{cl}(\tau)}{\partial \tau}$. С другой стороны,

$$S[x_{cl}(\tau) + z(\tau)] \approx S[x_{cl}(\tau)] + S_2[z(\tau)] = S[x_{cl}(\tau)] + \delta\tau^2 \cdot S_2\left[\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right] \tag{18}$$

и тем самым мы понимаем, что $\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}$ (с точностью до нормировки) даёт нулевую моду действия S_2. Несложно убедиться, что она (с точностью до константы) совпадает с выписанной тут $\psi_0(\tau)$. В дальнейшем нам приходится нормированное выражение для $\psi_0(\tau)$; это можно сделать в общем виде, используя выражения для действия на инстантоне (9). Тем самым, мы получаем:

$$\boxed{\psi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}} \tag{19}$$

Непрерывный спектр В том-же 4 семинаре исследовался также и непрерывный спектр оператора. В частности, имелось выражение для волновых функций задачи рассеяния (волна падает слева направо — для полного набора к ним, конечно же, нужно добавить также решения, соответствующие падению волны справа налево). Особенностью данного потенциала является то, что при целом s рассеяния оказывается *безотражательным*, и волновая функция задачи рассеяния содержит только прошедший «кусок».

Непрерывный спектр параметризуется волновым вектором k, так что энергия $E_k = \frac{k^2}{2m} = k^2 \Rightarrow \epsilon_k = \omega^2 + k^2$; а сами волновые функции имеют следующий вид:

$$\psi_k(x) \approx \begin{cases} \frac{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)}{\Gamma(-ika-s)\Gamma(-ika+s+1)} e^{ikx} \equiv e^{ikx + i\delta(k)} & x \to -\infty \\ e^{ikx}, & x \to +\infty \end{cases} \tag{20}$$

(безотражательность рассеяния означает, что амплитуда прохождения сводится к чистой фазе: $t = e^{-i\delta_k}$). Аналитическое выражение для фазы тоже можно выписать (подставляя $a = \frac{2}{\omega}$ и $s = 2$)[4]:

$$e^{-i\delta(k)} = \frac{\Gamma(-ika-2)\Gamma(-ika+3)}{\Gamma(1-ika)\Gamma(-ika)} = \frac{(2-ika)(1-ika)}{(2+ika)(1+ika)} = \frac{1-\frac{ik}{\omega}}{1+\frac{ik}{\omega}} \cdot \frac{1-\frac{2ik}{\omega}}{1+\frac{2ik}{\omega}} = \exp\left(-2i\left[\arctan\frac{k}{\omega} + \arctan\frac{2k}{\omega}\right]\right) \tag{21}$$

$$\boxed{\delta(k) = 2\left[\arctan\frac{k}{\omega} + \arctan\frac{2k}{\omega}\right] = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 2\pi, & k \to \infty \end{cases}} \tag{22}$$

Помимо таких состояний, имеются также и комплексно-сопряжённые решения $\psi^*(x)$, которые описывают волны, падающие справа налево; и вместе они образуют полный набор.

[4] Существует прекрасное топологическое утверждение, которое носит название *теоремы Левинсона*. Данная теорема связывает разность фаз рассеяния с количеством связанных уровней в трёхмерной сферически симметричной яме: $\delta_l(k \to \infty) - \delta_l(0) = -\pi N$ (имеются модификации: в правой части имеется фактор $1/2$ в случае, когда в яме только возникает связанное состояние на нулевой энергии — наш случай — а также для s-канала рассеяния). Она также достаточно просто и обобщается на одномерье.

Дискретизация непрерывного спектра В действительности же тут пора вспомнить о том, что на языке функционального интеграла мы рассматриваем траектории на конечном, хоть и большом, интервале β с нулевыми граничными условиями. Поэтому непрерывный спектр в действительности является дискретным — нам необходимо лишь составить линейную комбинацию ψ_k и ψ_k^*, которая занулялась бы на обоих стенках. Те k, при которых это возможно, и будут давать уровни энергии $\epsilon_n = \omega^2 + k_n^2$. Итак, пусть волновая функция имеет вид $\psi_n(x) = A\psi_k(x) + B\psi_k^*(x)$. Тогда имеется пара условий:

$$\begin{cases} A\psi_k(-\beta/2) + B\psi_k^*(-\beta/2) &= 0 \\ A\psi_k(\beta/2) + B\psi_k^*(\beta/2) &= 0 \end{cases} \tag{23}$$

Такая система уравнений на A и B совместна и имеет ненулевое решение только если её определитель равен нулю:

$$\det \begin{vmatrix} \psi_k(-\beta/2) & \psi_k^*(-\beta/2) \\ \psi_k(\beta/2) & \psi_k^*(\beta/2) \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Используя асимптотики волновой функции на $\pm\infty$ (известные из задачи рассеяния) мы тем самым получаем:

$$\det \begin{vmatrix} e^{-ik\beta/2 + i\delta(k)} & e^{ik\beta/2 - i\delta(k)} \\ e^{ik\beta/2} & e^{-ik\beta/2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(k\beta + \delta(k)) = 0 \tag{25}$$

Тем самым, имеется набор k_n, которые являются решением следующего трансцедентного уравнения:

$$k_n\beta - \delta(k_n) = \pi n \tag{26}$$

Обратим внимание, что случаю $n = 0$ соответствует тривиальное решение этого, вообще говоря, трансцедентного уравнения: $k = 0$. Такая волновая функция — тождественный ноль, и нас не интересует. Поэтому нумерация n начинается с 1.

Давайте исследуем, как устроены решения этого уравнения. Вообще говоря, поскольку $\beta \gg 1$ — очень большое число, то при $n \ll \beta$ решения этого уравнения очень близки к $k_n \approx p_n \equiv \frac{\pi n}{\beta}$; поправки можно найти по теории возмущений. С другой стороны, при $n \gtrsim \beta$, фазы рассеяния уже выходят на константу $\delta(k_n) \approx \delta(k_n \to \infty) = 2\pi$. Поэтому решение уравнения устроены следующим образом:

$$\boxed{k_n \approx p_n + \delta(p_n)/\beta, \quad p_n = \pi n/\beta} \tag{27}$$

Нормировка функционального интеграла

Конечно, как мы уже обсуждали ранее, мера функционального интеграла $\mathcal{D}$ содержит бесконечную константу $\mathcal{N}$, связанную с дискретизацией — и поэтому буквально выписанным выражением воспользоваться не удастся. Для того, чтобы придать этому выражению смысл, необходимо рассмотреть отношение двух функциональных интегралов, в котором эта бесконечная нормировка сократится. В качестве такого выражения удобно использовать уже сосчитанную ранее функцию Грина квантового гармонического осциллятора; удобно выбрать его с такой же частотой ω, чтобы квадратичные операторы, стоящие в действии были похожи:

$$G_0(\beta) = \int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left[(\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2\right]\right) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh \omega\beta}} \tag{28}$$

И тем самым мы, в действительности, будем работать со следующим выражением:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \frac{\int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[(\partial_\tau z)^2 + U''(x_{cl}(\tau)) z^2(\tau)\right]\right)}{\int_{z(-\beta/2)=0}^{z(\beta/2)=0} \mathcal{D}[z(\tau)] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[(\partial_\tau z)^2 + \omega^2 z^2\right]\right)} \tag{29}$$

Спектр оператора (знаменатель)

Собственно, с функциональным интегралом, что стоит в знаменателе, мы уже работали — поэтому кратко озвучим результаты. В принципе, оператор $(-\partial_\tau^2 + \omega^2)$, который там стоит, тоже похож на уравнение Шрёдингера в константном потенциале $U(\tau) = \omega^2 = \text{const}$, и тоже обладает лишь непрерывным спектром. Однако нулевые граничные условия, как и в прошлый раз, спектр дискретизуют, волновые функции $\psi_k^{(0)}(\tau)$ представляют собой стоячие волны, а спектр получается следующий:

$$\boxed{\epsilon_p^{(0)} = \omega^2 + p^2, \quad p = p_n = \pi n/\beta} \tag{30}$$

Вычисление гауссового интеграла

Итак, мы вплотную приблизились к тому, чтобы, наконец, посчитать гауссов функциональный интеграл. Мы делаем разложение в числителе вида $z(\tau) = \sum_n c_n \psi_n(\tau)$ (учитывая дискретный спектр!) и в знаменателе $z(\tau) = \sum_n c_n \psi_n^{(0)}(\tau)$. Учитывая гауссовость обоих интегралов, мы получаем:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \prod_n \left(\frac{\int dc_n \exp(-\frac{1}{2}\epsilon_n c_n^2)}{\int dc_n \exp(-\frac{1}{2}\epsilon_n^{(0)} c_n^2)} \right) \tag{31}$$

(обратите внимание, что поскольку мы имеем дело, вообще говоря, с бесконечными произведениями *размерных* констант — после вычисления функционального интеграла — которые сами по себе плохо определены, то чтобы этот интеграл имел смысл, необходимо делить буквально почленно. Ровно этим мы и занимались, когда считали осциллятор). Если бы не было нулевой моды, то это считалось бы следующим образом:

$$\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \left(\prod_n \frac{\epsilon_n}{\epsilon_n^{(0)}} \right)^{-1/2} \equiv e^{-S_0} \left(\frac{\det(-\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau)))}{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right)^{-1/2} \tag{32}$$

Нулевая мода Итак, интеграл по dc_0, соответствующий нулевой моде $\psi_n(\tau)$, происходит в бесконечных пределах, выглядит как $\int dc_0$ и в гауссовом приближении расходится — в таком случае, как правило, интеграл нужно брать *точно*. Наличие нулевых мод, как правило, связаны с какой-то симметрией — в данном случае, трансляционной; и в таком случае интегрирование обычно сводится к *объему* соответствующей группы симметрии.

В нашем случае, нулевая мода напрямую связана с произвольностью выбора константы τ_c в инстантоне, который имеет вид $x_c(\tau - \tau_c)$. Заметим, что смещение вдоль нулевой моды dc_0 в точности соответствует смещению центра инстантона:

$$d(x_{cl}(\tau - \tau_c)) \equiv \psi_0(\tau) dc_0, \quad d(x_{cl}(\tau - \tau_c)) \equiv \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} d\tau_c \tag{33}$$

Приравнивая эти два выражения, и замечая, что $\psi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}$, мы получаем следующий вид интеграла по нулевой моде в числителе: $\int dc_0 \equiv \sqrt{S_0} \int d\tau_c = \beta \sqrt{S_0}$. В соответствующем выражении в знаменателе стоит следующий интеграл (там нумерация n начинается с 1, что, впрочем, не очень важно — ведь мы имеем дело с непрерывным спектром, и все собственные числа с маленькими номерами малы):

$$\int dc_1 e^{-\frac{1}{2}\epsilon_1^{(0)} c_1^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_1^{(0)}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega^2 + \pi^2/\beta^2}} \underset{\beta\to\infty}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \tag{34}$$

Тем самым, если ввести условное обозначение $\det' \hat{L}$ — интеграл с исключённым наименьшим собственным числом — то бишь отщепив нулевую моду — мы получаем:

$$\boxed{\frac{G(\eta, -\eta, \beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0} \cdot \left(\omega\beta \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \right) \cdot \left(\frac{\det'(-\partial_\tau^2 + U''(x_{cl}(\tau)))}{\det'(-\partial_\tau^2 + \omega^2)} \right)^{-1/2}} \tag{35}$$

Возникновение множителя $\sqrt{S_0}$, связанного с нулевой модой — утверждение в действительности совершенно общего характера.

Дискретный спектр Помимо нулевой моды, имеется также ещё одно состояние дискретного спектра, $\epsilon_1 = \frac{3}{4}\omega^2$. Оно даст следующий вклад (отнормированный на соответствующий вклад $\epsilon_2^{(0)} = \omega^2 + (2\pi/\beta)^2 \approx \omega^2$ от осциллятора:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2^{(0)}} \underset{\beta\to\infty}{\approx} \frac{\frac{3}{4}\omega^2}{\omega^2} = \frac{3}{4} \tag{36}$$

Непрерывный спектр Итак, самое сложное — вычисление состояния непрерывного спектра, бесконечного произведения (обратите внимание, нумерация в числителе начинается с $n = 1$, а в знаменателе — с $n = 3$, поскольку первых два состояния мы уже «отщепили» при работе с дискретным спектром). Для вычисления, это бесконечное произведение удобно прологарифмировать, а также воспользоваться приближенным решением трансцедентного уравнения $k_n \approx p_n - \delta(p_n)/\beta$:

$$\frac{\det''}{\det''} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{k_n^2 - p_{n+2}^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \right) \approx \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 - p_{n+2}^2}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \approx$$
$$\approx \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_{n+2}(k_n - p_{n+2})}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) = \exp\left(\frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta(p_n) - 2\pi) 2p_{n+2}}{\omega^2 + p_{n+2}^2} \right) \tag{37}$$

Вообще говоря, тот факт, что k_n и p_n очень близки (по $\frac{1}{\beta}$) на всём промежутке произведения означает, что все члены произведения очень близки к 1, и только за счёт их большого количества ($\sim\beta$) это произведение оказывается отличным от единицы (а сумма — от нуля). Для суммирования плавной функции, удобно заменить сумму на интеграл, согласно $\sum_n = \int_0^\infty \frac{\beta dp}{\pi}$ и увидеть, что β из ответа полностью выпадает, а ответ — конечный:

$$\frac{\det''}{\det''} = \exp\left(\int_0^\infty \frac{dp}{\pi}\frac{2p(\delta(p)-2\pi)}{\omega^2+p^2}\right) \tag{38}$$

Обратим внимание, что полученный тут член 2π обеспечивает сходимость интеграла на бесконечности (ведь $\delta(p\to\infty)\to 2\pi$); в противном случае интеграл бы логарифмически расходится. Само число 2π явно связано с количеством связанных состояний; но ровно с этим же и связана фаза $\delta(p\to\infty)$! — поэтому теорема Левинсона, о которой сказано в примечании, в действительности гарантирует сходимость этого интеграла на бесконечности. Следующий шаг — интегрирование по частям:

$$\frac{\det''}{\det''} = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\frac{d\delta}{dp}\ln\frac{\omega^2+p^2}{\omega^2}\right) \tag{39}$$

Прелесть этого выражения ещё и в том, что этот неприятный 2π-член, который «помнит» о количестве связанных состояний, в него не входит; а кроме того, фаза — вообще говоря, многозначная функция, и плохо определена (с точностью до $2\pi n$), а вот производная фазы определена уже хорошо. Поэтому, например, в инстантонной азбуке не сильно «замораживаются» с явным выражением для фазы и отделением этого 2π-члена, а приходят к этому выражению, с которым уже и работают.

Итак, оставшийся интеграл обезразмеривается подстановкой $p=\omega y$, считается явно и даёт:

$$\int_0^\infty dp\frac{d\delta}{dp}\ln\left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right) = 2\int_0^\infty dy\ln(1+y^2)\left[\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{4y^2+1}\right] = 2\pi\ln 3, \tag{40}$$

а вклад от непрерывного спектра равен:

$$\frac{\det''}{\det''} = \frac{1}{9} \tag{41}$$

Одноинстантонный ответ

Во-первых, тем самым мы получили ответ для отношения детерминантов (с исключённой нулевой модой):

$$\frac{\det'(-\partial_\tau^2+\omega^2-\frac{3\omega^2/2}{\cosh^2(\omega\tau/2)})}{\det'(-\partial_\tau^2+\omega^2)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{12} \tag{42}$$

и мы получили следующий ответ (в одноинстантонном приближении):

$$\boxed{\frac{G(\eta,-\eta,\beta)}{G_0(\beta)} = e^{-S_0}\cdot\underbrace{\left(\omega\beta\sqrt{\frac{S_0}{2\pi}}\right)}_{\text{zero mode}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{4}{3}}}_{\text{bound state}}\cdot\underbrace{\sqrt{12}}_{\text{continuous spectrum}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}S_0}\omega\beta e^{-S_0}} \tag{43}$$

Наличие тут явной зависимости от бесконечной величины β должно смущать — ведь мы рассматриваем предел $\beta\to\infty$. В действительности же этот ответ, как инстантонная поправка, получен в пределе, покуда он мал — $\sqrt{S_0}\omega\beta e^{-S_0}\ll 1$ — и поэтому буквально бесконечной β сделать не удастся. С другой стороны, от β он явно зависит не экспоненциальным образом, поэтому пока непонятно, как извлечь из него непосредственно туннельное расщепление.

В действительности же найденный ответ — это первый порядок разложения по e^{-S_0} . Настоящий же ответ устроен попросту как

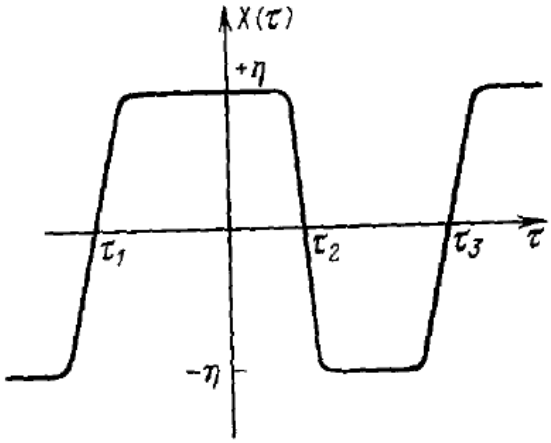
$$\frac{G(\eta,-\eta,\beta)}{G_0(\beta)} = \sinh(\Delta\beta), \quad \boxed{\Delta = \omega\cdot\sqrt{\frac{6S_0}{\pi}}e^{-S_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega\cdot\sqrt{\omega\eta^2}e^{-2\omega\eta^2/3}}. \tag{44}$$

То, что ответ должен быть таким, само по себе достаточно очевидно — мы знаем, что в реальном времени если посадить частицу в одну из ям, то она будет испытывать осцилляции Раби $\sin(\Delta t)$, и Δ даётся как раз туннельным расщеплением симметричного и антисимметричного состояния. В мнимом же времени, экспоненциальная зависимость восстанавливается; рассматривая разложения по собственным модам вида $G(x,y,\beta)=\sum_n\psi_n(x)\psi_n^*(y)e^{-\beta E_n}$, мы немедленно понимаем, что в задаче имеется пара уровней энергии $E=\frac{\omega}{2}\pm\Delta$. Тем не менее, чтобы получить этот ответ систематически, необходимо уйти за рамки одноинстантонного приближения, и рассмотреть многоинстантонные вклады.

Разреженный инстантонный газ

Помимо найденной единственной траектории $x_{cl}(\tau)$, при которой частица перекатывается из одного «горба» перевёрнутого потенциала на другой, имеются также и траектории, в которых она многократно катается «туда-сюда» (см. рис.).

Рис. 3: Многоинстантонная конфигурация



Давайте выясним, как устроен вклад от таких траекторий в приближении, что инстантоны расположены достаточно далеко друг от друга (это приближение носит название приближения разреженного инстантонного газа; ниже мы выясним, какому параметру оно соответствует). Во-первых, действие на такой траектрии из n инстантонов, очевидным образом, будет равно $S_n = nS_0$, а эффективный потенциал с экспоненциальной точностью устроен как набор аналогичных ям от каждого инстантона. Интуитивно понятно, что и квадратичные флуктуации вблизи каждого инстантона факторизуются, поскольку инстантоны достаточно хорошо разнесены в пространстве[5]; это можно показать и явно. В каждой из ям будет свой набор состояний дискретного спектра, поэтому вклад от последнего факторизуется. Непрерывный же спектр устроен безотражательно для каждого из инстантонов — поэтому полная фаза рассеяния на всех инстантонах будет попросту суммой фаз от каждого из инстантонов, $\delta^{(n)}(p) = n\delta(p)$ — из-за чего факторизуется также и вклад от непрерывного спектра. Наконец, с каждым из инстантонов будет связана своя нулевая мода — интегрирование по положению его центра; и вклад от нулевых мод будет устроен следующим образом:

$$\int_{-\beta/2<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\beta/2} d\tau_1 \dots d\tau_n = \frac{\beta^n}{n!} \tag{45}$$

Для перехода $-\eta \to \eta$, только конфигурации с нечётным количеством инстантонов дают вклад. Поэтому, суммирование разреженного инстантонного газа приводит к следующему ответу:

$$\frac{G(\eta,-\eta,\beta)}{G_0(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}S_0}\omega\beta e^{-S_0}\right)^{2n+1} = \sinh\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}S_0}\omega\beta e^{-S_0}\right) \tag{46}$$

Точно такое же суммирование можно было бы провести и для, например, $\eta \to \eta$. В таком случае очевидным образом вклад давали бы только конфигурации с чётным количеством инстантонов, и в ответе ожидаемым образом получился бы cosh.

Давайте выясним, по какому параметру работает наше приближение. Мы имеем дело с суммой $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Члены этого ряда с n сначала возрастают (из-за, вообще говоря, большого множителя $\Delta\beta$), а затем убывают (из-за факториала в знаменателе — ряд-то сходится!). Можно убедиться, что пик приходится на $n^* \approx \Delta\beta$, и именно такие инстантонные конфигурации дают наибольший вклад в сумму, и условие разреженности должно выполняться именно для них. С другой стороны, типичная ширина каждого инстантона равна, как мы помним, ω^{-1}; требование сводится к тому, что ширина n^* инстантонов должна быть по-прежнему маленькой по сравнению со всей длиной отрезка β. Этот критерий соответствует $\Delta \ll \omega$; тем самым, наше приближение работает только покуда инстантонная поправка является маленькой (что совершенно ожидаемо) — это, в свою очередь, соответствует туннельному пределу $S_0 \gg 1$.

[5] Чуть более формально это можно было бы понять, наверное, следующим образом. Если между инстантонами установить бесконечные стенки, то такого рода факторизация будет совершенно очевидна — каждый из инстантонов будет «жить» в своём ящике. А дальше можно спекулировать о том, что из «термодинамических» соображений установка стенок вдали от ям слабо модифицируют задачу.