Надбарьерное отражение

25 апреля 2018

В данном семинаре будет рассмотрена задача надбарьерного рассеяния частиц в квазиклассическом потенциале. Трудность заключается в том, что с точки зрения «наивной» квазиклассики, в отсутствии квазиклассических точек остановки $U(x) = E$, волновая функция устроена следующим образом:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(i \int^x p(x)dx\right), \quad p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))} \tag{1}$$

Такая волновая функция тривиальна — она не содержит отражённой волны, коэффициент отражения $R = 0$, а прохождения $T = 1$. Конечно, это не соответствует действительности — в потенциале самого общего вида *всегда* имеется отражение. На примере точно решаемых задач мы знаем, что коэффициенты надбарьерного отражения от плавных потенциалов, как правило, экспоненциально малы — и они попросту выходят за рамки точности такого «наивного» квазиклассического приближения. В качестве примера мы рассмотрим движение частицы энергии E в следующем потенциале:

$$U(x) = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{2}$$

Напомним, что этот потенциал относится к классу точнорешаемых методом Лапласа (волновые функции выражаются через функции параболического циллиндра). В частности, известны точные амплитуды прохождения и отражения:

$$\begin{cases} r &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-i\beta - i\beta \ln 2 - i\pi/2}}{e^{\pi\beta/2} \cosh \pi\beta \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)} \\ t &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-i\beta - i\beta \ln 2}}{e^{-\pi\beta/2} \cosh \pi\beta \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R &= \frac{1}{1 + e^{2\pi\beta}} \\ T &= \frac{1}{1 + e^{-2\pi\beta}} \end{cases}, \quad \beta = \frac{E}{\omega} \tag{3}$$

Ключевой идеей во всём изложении будет использование аналитической структуры потенциала (и волновой функции) в комплексной плоскости. В комплексной плоскости у такого потенциала всё-таки имеются комплексные точки остановки[1]: $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = -E \Rightarrow x = x_{1,2} = \pm i x_0 \equiv \pm i \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. Метод WKB же даёт асимптотики волновой функции во всей комплексной плоскости, за исключением небольшой окрестности комплексных точек остановки — этим мы и воспользуемся. Но для начала, давайте рассмотрим более простой случай — а именно, случай обычной точки остановки и линейного потенциала $U(x) = -Fx$.

Обычная точка остановки

Давайте рассмотрим для простоты обезразмеренную задачу — уравнение Шрёдингера линейном потенциале:

$$-\psi''(z) - z\psi(z) = 0 \tag{4}$$

Квазиклассический импульс имеет вид $p^2(z) = z \Rightarrow p(z) = \sqrt{z}$. Поскольку мы имеем дело с комплексной плоскостью, нам нужно определить ветвь квадратного корня — направим её вдоль мнимой оси вниз ($\arg z = -\frac{\pi}{2}$). Квазиклассическое действие имеет вид $S(z) = \int_0^z p(z)dz = \frac{2}{3} z^{3/2}$, и произвольное решение (во всей комплексной плоскости, покуда работает квазиклассическое приближение — то есть при $|z| \gg 1$) раскладывается по паре линейно независимых решений следующего вида:

$$\psi(z) = C_+ \psi_+(z) + C_- \psi_-(z), \quad \psi_\pm(z) = \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(\pm \frac{2}{3} i z^{3/2}\right) \tag{5}$$

[1] В действительности полученные ответы будут работать не только для *буквально* потенциала вида $-x^2$ — конечно, неограниченных снизу таких потенциалов в природе попросту не бывает. Достаточно, чтобы потенциал выглядел как $-x^2$ вблизи максимума в достаточно широкой области — а именно, при $x \lesssim |x_{1,2}|$. В таком виде, исследуемый тут потенциал является потенциалом достаточно общего вида.

Структура решений WKB

Давайте исследуем, как устроены представленные тут решения в комплексной плоскости, при $z = |z|e^{i\varphi}$ (напомним, наш выбор разреза соответствует выбору фазы $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$):

$$\psi_\pm(|z|e^{i\varphi}) = \frac{e^{-i\varphi/4}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3} i e^{3i\varphi/2} |z|^{3/2}\right) \tag{6}$$

У этого решения имеются специальные линии, где показатель экспоненты — чисто ественный, а решения имеют не осциллирующую природу, а экспоненциально возрастающие и затухающие. Эти линии носят название *линий Стокса*, и в данной задаче они устроены следующим образом:

$$\boxed{\text{Stokes' lines:} \quad \begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{3} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/12}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\mp\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right) \\ \arg z = \pi & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right) \\ \arg z = -\frac{\pi}{3} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{i\pi/12}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3}|z|^{3/2}\right) \end{cases}} \tag{7}$$

В противовес им, имеются *линии анти-Стокса*[2], на которых решения — чисто осциллирующие:

$$\boxed{\text{anti-Stokes' lines:} \quad \begin{cases} \arg z = 0 & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{1}{|z|^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3} i |z|^{3/2}\right) \\ \arg z = \frac{2\pi}{3} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/6}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\mp\frac{2}{3} i |z|^{3/2}\right) \\ \arg z = \frac{4\pi}{3} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/3}}{|z|^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3} i |z|^{3/2}\right) \end{cases}} \tag{8}$$

Структура линий Стокса очень важна с точки зрения метода WKB. С каждым WKB-решением связан целый асимптотический ряд, который можно оптимальным образом просуммировать, получив его *суперасимптотику* — а также неустранимую ошибку, погрешность этого асимптотического ряда. Погрешность, как правило, экспоненциально мала — но если одно решение экспоненциально большое, а второе — экспоненциально маленькое, то может так оказаться, что ошибка экспоненциально большого решения оказывается *больше* экспоненциально маленького решения — в связи с чем сохранение этого решения, вообще говоря, незаконно. Именно это, как правило, происходит на линиях Стокса, где разница между решениями максимальна. В свою очередь это означает, что на линиях Стокса (и только на них!) коэффициент при экспоненциально маленьком решении может измениться скачкообразно. Такой скачок носит названия *явления Стокса*, и это явление будет ключевым для нашего анализа. Давайте проследим, как проявляет себя явление Стокса для функции Эйри.

Функция Эйри

Итак, функция Эйри определяется как решение рассматриваемого нами дифференциального уравнения[3], которое при $z < 0$ содержит чисто экспоненциально затухающее решение. Важно, что $z < 0$ — это линия Стокса, и зафиксировать решение, выбрав только *экспоненциально растущее решение* на линии Стокса невозможно (т.к коэффициент при экспоненциально затухающем в таком случае был бы не определён):

$$\begin{cases} C_+ &= 0 \\ C_- &= 1 \end{cases}, \quad \arg z = \pi \tag{9}$$

Обход сверху Давайте проследим, как это решение устроено в комплексной плоскости, «обходя» точку остановки сверху — вдоль контура $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\pi, 0)$.

- $\pi > \arg z > \frac{\pi}{3}$: покуда мы не пересекаем линии Стокса, коэффициенты $C_\pm$ измениться не могут — из чего мы заключаем следующее:

$$\boxed{\begin{cases} C_+ &= 0 \\ C_- &= 1 \end{cases}, \quad \pi > \arg z > \frac{\pi}{3}} \tag{10}$$

- $\arg z = \frac{\pi}{3}$. На этой линии решение $\psi_+(z)$, которое было экспоненциально растущим, становится экспоненциально маленьким — в связи с чем коэффициент C_+ может измениться произвольным образом. С другой стороны, решение $\psi_-(z)$, которое было затухающим, стало растущим, и коэффициент при нём измениться не может!

- $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$: вплоть до следующей линии Стокса мы тем самым можем записать:

$$\begin{cases} C_+ &= ? \\ C_- &= 1 \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} \tag{11}$$

[2] Терминология, увы, порой разнится. В частности, в математической литературе иногда определения поменяны местами

[3] На самом деле, у функции Эйри коэффициент при линейной части имеет другой знак, поэтому решения нашего уравнения — это $\mathrm{Ai}(-z)$

Таким образом, мы дошли до вещественной оси $z > 0$, обойдя комплексную точку остановки сверху, и смогли определить один из коэффициентов. Второй коэффициент можно найти двумя способами, и мы изложим оба.

Вещественность Первый аргумент прост, но менее универсален. Заметим, что решение $\widetilde{\psi}(z) = e^{i\pi/4}\psi(z)$ при $z < 0$ чисто вещественно, поэтому оно обязано быть вещественным и при $z > 0$. С другой стороны, при $z > 0$ имеем:

$$\widetilde{\psi}(z > 0) = \frac{C_+ e^{i\pi/4}}{z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} i z^{3/2}\right) + \frac{e^{i\pi/4}}{z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} i z^{3/2}\right) \tag{12}$$

Полученная комбинация вещественна только при $C_+ = e^{-i\pi/2} = -i$. Из этого мы заключаем:

$$\boxed{\begin{cases} C_+ &= -i \\ C_- &= 1 \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},} \tag{13}$$

а само решение $\widetilde{\psi}(z)$ на вещественной оси имеет следующий вид[4]:

$$\widetilde{\psi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}|z|^{3/2}}, & z < 0 \\ \frac{2}{z^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), & z > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Обход снизу Второй способ следующий. Предлагается посмотреть, что же будет происходить при обходе снизу.

- $\frac{3\pi}{2} > \arg z > \pi$: имеется небольшое отличие от предыдущего способа — а именно, наш обход сперва упирается в разрез, который был пущен вдоль $\arg z = \frac{3\pi}{2}$, на котором коэффициенты тоже, вообще говоря, могут измениться:

$$\boxed{\begin{cases} C_+ &= 0 \\ C_- &= 1 \end{cases}, \quad \frac{3\pi}{2} > \arg z > \pi} \tag{15}$$

- $\arg z = \frac{3\pi}{2} \vee \arg z = -\frac{\pi}{2}$. Изменение коэффициентов на разрезе определяется очень просто. Дело в том, что построенный нами разрез — вещь фиктивная: само решение, конечно, является однозначной функцией во всей комплексной плоскости. Разрез мы сделали сами (при этом мы могли пустить его куда угодно), и он был нужен нам для определения WKB-решений. Решение при $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ и $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ должны тождественно совпадать:

$$C_+\psi_+(|z|e^{3i\pi/2}) + C_-\psi_-(|z|e^{3i\pi/2}) \equiv C'_+\psi_+(|z|e^{-i\pi/2}) + C'_-\psi_-(|z|e^{-i\pi/2}) \tag{16}$$

  Если аргумент z изменить на 2π (обойти против часовой стрелке точку ветвления, остановившись на другом берегу разреза), то решения попросту поменяются местами (с точностью до фаз):

$$\psi_\pm(ze^{2\pi i}) = \frac{-i}{z^{1/4}} \exp\left(\mp\frac{2}{3} i z^{3/2}\right) = -i\psi_\mp(z) \tag{17}$$

  и поэтому условие однозначности функции сводится к следующему простому условию сшивки:

$$\boxed{\begin{cases} C'_+ &= -iC_- \\ C'_- &= -iC_+ \end{cases}, \quad \arg z = \frac{3\pi}{2} \vee -\frac{\pi}{2}} \tag{18}$$

- $-\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{3}$: тем самым, от разреза и до следующей линии Стокса, коэффициенты имеют следующий вид:

$$\boxed{\begin{cases} C_+ &= -i \\ C_- &= 0 \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{3} > \arg z > -\frac{\pi}{2}} \tag{19}$$

- $\arg z = -\frac{\pi}{3}$: тот факт, что решения поменялись местами на разрезе, нам очень помогает — потому что именно решение $\psi_+(z)$ на этой линии Стокса экспоненциально растущее, и коэффициент C_+ измениться не может. C_- же изменяется произвольным образом — но нам оно не интересно, ведь мы его уже нашли, обойдя точку остановки снизу! Тем самым, мы подтверждаем вывод, сделанный из аргумента вещественности.

[4] В этом решении мы немедленно узнаём функцию Эйри $\widetilde{\psi}(z) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{Ai}(-z)$.

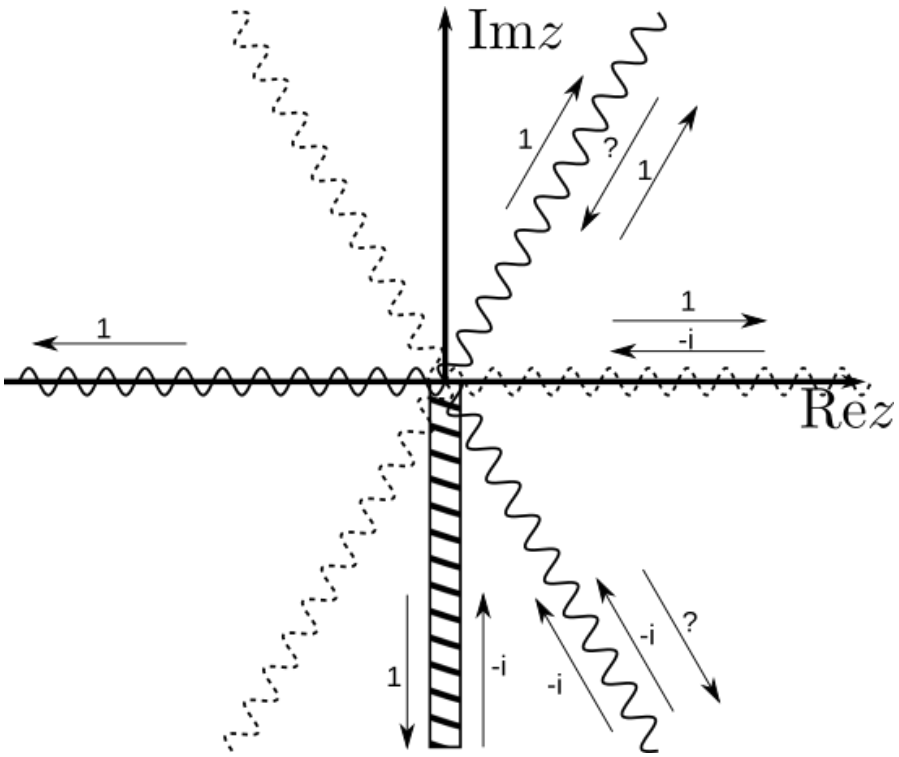

Рис. 1: Структура комплексной плоскости для функции Эйри. Заштрихованная область — разрез. Волнистые сплошные линии — линии Стокса; пунктирные — линии анти-Стокса. Стрелка, направленная к центру — решение $\psi_+(z)$; от центра — решение $\psi_-(z)$.

Квадратичный потенциал

Теперь, продемонстрировав метод на простом примере, давайте его применим к чуть более сложному — а именно, к интересующему нас потенциалу $U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Линии Стокса определяются из условия $\mathrm{Im}S(z) = \mathrm{Im}S(x_{1,2})$, а анти-Стокса — условием $\mathrm{Re}S(z) = \mathrm{Re}S(x_{1,2})$; они изображены на рисунке.

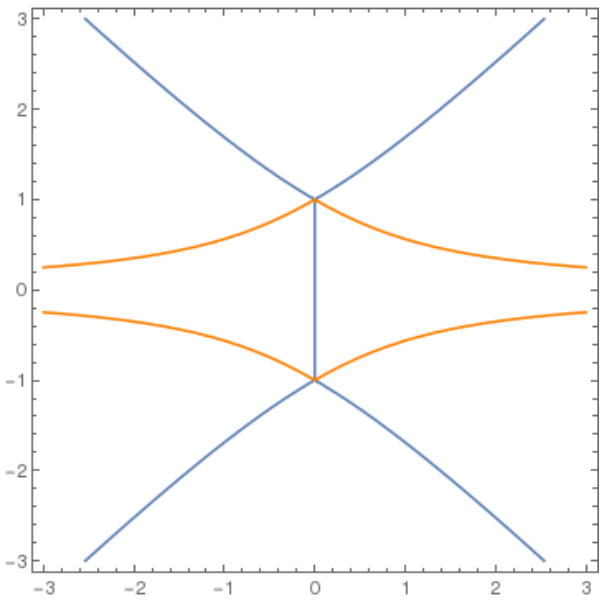

Рис. 2: Линии Стокса (синие) и анти-Стокса (оранжевые) квазиклассических решений в комплексной плоскости $(\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x)$ в потенциале $U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Оси в единицах x_0. Третью линию анти-Стокса, которая должна быть направлена вдоль мнимой оси, Mathematica рисовать отказалась — видимо, из-за совпадения последней с разрезом.

Видно, что проблема заключается в том, что при движении по вещественной оси мы пересекаем одну из линий Стокса (даже не замечая этого) — и теряем отражённую волну. Для того, чтобы её найти, мы сделаем следующую процедуру: вдоль одной из линий анти-Стокса мы пройдём до одной из комплексных точек остановки; используя анализ, проделан-

ный выше, мы найдём амплитуды обоих волн на второй линии анти-Стокса; а затем мы по ней спустимся обратно на вещественную ось. Таким способом мы сможем найти связь коэффициентов прохождения и отражения[5].

Квазиклассический импульс имеет следующий вид:

$$p(x) = \sqrt{2m\left(E + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)} = m\omega\sqrt{x_0^2 + x^2} \tag{20}$$

Можно пустить разрезы $(x_1, i\infty)$ и $(-i\infty, x_2)$, но чуть левее линий анти-Стокса, и зафиксировать физическую ветвь естественным условием вещественности на вещественной оси[6]. Сшивки мы будем проводить, скажем, в окрестности точки остановки ix_0, где УШ имеет следующий приближённый (обезразмеренный) вид:

$$-\psi''(z) - iz\psi(z) = 0, \quad z = (2m^2\omega^2 x_0)^{1/3}(x - ix_0) \tag{21}$$

Сшивка вблизи $x_1 = ix_0$ Сразу можно обсудить применимость изложенного метода. Квазиклассическое приближение для этого уравнения будет работать при $|z| \gg 1$, а само разложение потенциала работает покуда $|x - x_1| \ll x_0 \Leftrightarrow |z| \ll (\frac{E}{\omega})^{2/3}$. Тем самым, имеется ненулевая область применения только если $E \gg \omega$ — что довольно естественно. С учётом этого, импульс и действие, а также квазиклассические решения имеют вид:

$$p(z) = \sqrt{iz} = e^{i\pi/4} z^{1/2}, \quad S(z) = \frac{2}{3} e^{i\pi/4} z^{3/2}, \quad \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/8}}{z^{1/4}} e^{\pm\frac{2}{3} i e^{i\pi/4} z^{3/2}} \tag{22}$$

Разрез корня уходит вверх, $\arg z \in (-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а условие, фиксирующее ветвь — при $z = -i|z|$, $p(z)$ вещественно (что как раз соответствует «физической» ветви). На линиях Стокса и анти-Стокса решения принимают следующие значения:

$$\text{Stokes:} \quad \begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{6} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/6}}{|z|^{1/4}} e^{\mp\frac{2}{3}|z|^{3/2}} \\ \arg z = -\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{1}{|z|^{1/4}} e^{\pm\frac{2}{3}|z|^{3/2}} \\ \arg z = -\frac{7\pi}{6} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{i\pi/6}}{|z|^{1/4}} e^{\mp\frac{2}{3}|z|^{3/2}} \end{cases}, \quad \text{anti-Stokes:} \quad \begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{|z|^{1/4}} e^{\mp\frac{2}{3} i|z|^{3/2}} \\ \arg z = -\frac{\pi}{6} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{-i\pi/12}}{|z|^{1/4}} e^{\pm\frac{2}{3} i|z|^{3/2}} \\ \arg z = -\frac{5\pi}{6} & \Rightarrow \psi_\pm(z) = \frac{e^{i\pi/12}}{|z|^{1/4}} e^{\mp\frac{2}{3} i|z|^{3/2}} \end{cases} \tag{23}$$

- На линии анти-Стокса $\arg z = -\frac{\pi}{6}$, решение $\psi_+(z)$ соответствует прошедшей волне, а $\psi_-(z)$ — падающей. Поскольку мы решаем задачу рассеяния, мы фиксируем решение следующим образом:

$$\begin{cases} C_+ & = \widetilde{t} \\ C_- & = 0 \end{cases}, \quad \arg z = -\frac{\pi}{6} \tag{24}$$

- $\frac{\pi}{2} > \arg z > -\frac{\pi}{2}$: обходим сверху. На линии Стокса $\arg z = \frac{\pi}{6}$, решение $\psi_+(z)$ экспоненциально затухает, а $\psi_-(z)$ — растёт. Коэффициент C_- тем самым не может измениться; однако, поскольку он равен 0, то измениться не может также и C_+. Поэтому написанные выше коэффициенты, в действительности, работают вплоть до разреза $\arg z = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} C_+ & = \widetilde{t} \\ C_- & = 0 \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2} > \arg z > -\frac{\pi}{2} \tag{25}$$

- $-\frac{7\pi}{6} > \arg z > -\frac{3\pi}{2}$: сшивка на разрезе делается аналогично из требования однозначности функции. При обходе точки ветвления снизу против часовой стрелке, решения опять-таки меняются местами с дополнительной фазой: $\psi_\pm(ze^{2\pi i}) = -i\psi_\mp(z)$, поэтому слева (вплоть до линии Стокса $\arg z = -\frac{7\pi}{6}$) и справа от разреза коэффициенты связаны: $C'_\pm = -iC_\mp$. В частности:

$$\begin{cases} C_+ & = 0 \\ C_- & = -i\widetilde{t} \end{cases}, \quad -\frac{7\pi}{6} > \arg z > -\frac{3\pi}{2} \tag{26}$$

- $-\frac{\pi}{2} > \arg z > -\frac{7\pi}{6}$: наконец, на лиии Стокса $\arg z = -\frac{7\pi}{6}$, решение ψ_- экспоненциально растёт, поэтому C_- не меняется. Мы заключаем:

$$C_- = -i\widetilde{t}, \quad -\frac{\pi}{2} > \arg z > -\frac{7\pi}{6} \tag{27}$$

- Теперь давайте устроим обход снизу. Он устроен куда проще, ведь на ближайшей линии Стокса $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, решение ψ_+ экспоненциально растёт — поэтому C_+ не меняется, а значит в этом же секторе имеем:

$$C_+ = \widetilde{t}, \quad -\frac{\pi}{2} > \arg z > -\frac{7\pi}{6}$$

Тем самым, мы получили слева как падающую (ψ_+), так и отражённую (ψ_-) волны.

[5]Удобней всего «ходить» именно по линиям анти-Стокса, потому что на них оба решения всегда всегда законно сохранять; а кроме того, поскольку на вещественной оси решения тоже чисто осциллирующие, то линии анти-Стокса, связанные с точкой остановки, асимптотически с ней приближаются.

[6]Выбор разрезов и ветвей, конечно же, совершенно произволен. Единственное — может быть неудобно, если разрез совпадает буквально с линией Стокса или анти-Стокса, с которыми мы будем работать

Вещественная ось Теперь давайте вернёмся на вещественную ось, и найдём коэффициенты прохождения и отражения. Вещественное решение определено следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{i\int_0^x p(x)dx} + \frac{r}{\sqrt{p(x)}} e^{-i\int_0^x p(x)dx}, & x < 0 \\ \frac{t}{\sqrt{p(x)}} e^{-i\int_0^x p(x)dx}, & x > 0 \end{cases} \tag{28}$$

(в отличии от решения $\psi_\pm$, тут интегрирование ведётся от нуля — или во всяком случае, от произвольной точки на вещественной оси — это важно!). Это же решение переписывается в следующем виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{i\int_0^{x_1} p(x)dx}\psi_+(x) + re^{-i\int_0^{x_1} p(x)dx}\psi_-(x), & \mathrm{Re}x < 0 \\ te^{i\int_0^{x_1} p(x)dx}\psi_+(x), & \mathrm{Re}x > 0 \end{cases} \tag{29}$$

Сравнивая с найденным выше квазиклассическим решением, мы получаем:

$$\begin{cases} r &= -ie^{2i\int_0^{x_1} p(x)dx} \\ t &= 1 \end{cases} \tag{30}$$

(отличие t от 1 уже находится за пределами квазиклассического приближения — условие $|t|^2 + |r|^2 = 1$ гарантирует, что поправка к t должна быть того же порядка, что и $|r|^2$!). Тем самым, мы получили ключевую формулу для коэффициента отражения:

$$\boxed{R = |r|^2 = e^{-4\mathrm{Im}\int_0^{x_1} p(x)dx}} \tag{31}$$

Поскольку $x_1 = ix_0$, то $\mathrm{Im}(dx) > 0$ и, тем самым, ответ действительно экспоненциально мал. В действительности, для данной формулы совершенно неважен вид потенциала, и коэффициент отражения определяется таким интегралом, взятым до ближайшей к вещественной оси комплексной точки остановки, лежащей в верхней комплексной полуплоскости. Неважен также и нижний предел интегрирования — интегрировать можно от любой точки, лежащей на действительной оси, т.к. добавляемый при этом интеграл по вещественной оси чисто вещественный и вклада не даёт. Интересные модификации этой задачи включают в себя случаи, когда параметрически близко к комплексной точкой остановки располагается полюс[7], или если имеется несколько комплексных точек остановки, лежащих на одинаковом расстоянии от вещественной оси[8]. Для нашей же задачи осталось лишь сосчитать тривиальный интеграл, воспроизводящий часть точного ответа

$$\int_0^{x_1} p(x)dx = im\omega x_0^2 \int_0^1 \sqrt{1-z^2}dz = i\frac{\pi E}{2\omega} \Rightarrow \boxed{R = e^{-2\pi E/\omega}} \tag{32}$$

Точное решение для потенциала $U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$

Для потенциала нужного вида можно найти точные коэффициенты прохождения и отражения, используя квазиклассическое приближение и не прибегая к сложному решению, использующему метод Лапласа. Идея метода заключается в том, что такой потенциал *всегда* квазиклассический на достаточно большом удалении от максимума (в том числе и в комплексной плоскости) — а именно, на расстояниях $|x| \gg x_0$, и обход можно провести вообще вдали от обеих точек остановки. Выпишем квазиклассическое действие:

$$S(z) = \int_0^z m\omega\sqrt{x_0^2 + x^2}dx \underset{|z|\gg x_0}{\approx} \int_0^z m\omega\left(x + \frac{x_0^2}{2x}\right)dx = \frac{m\omega z^2}{2} + \frac{E}{\omega}\ln\frac{z}{x_0} + O(1) \tag{33}$$

(константу тоже можно найти, но интересовать она нас не будет). До сих пор мы все сшивки проводили в промежуточной области $\left(\frac{1}{m(\omega^2 E)^{1/3}}\right)^{1/2} \ll |z \pm ix_0| \ll \sqrt{\frac{E}{m\omega^2}}$, а теперь предлагается провести обход в комплексной плоскости сильно дальше обеих комлексных точек остановки — а именно, при $z \gg x_0$. Проведём разрез вниз, выбрав ветвь $\arg z \in (-\frac{\pi}{2} - 0, \frac{3\pi}{2} - 0)$ (чуть левее, чтобы не «наползать» на линию анти-Стокса; что, впрочем, несущественно); исследуем линии Стокса и анти-Стокса квазиклассических решений. У всех у них будет одинаковый дополнительный фазовый множитель $\frac{E}{\omega}\ln\frac{|z|}{x_0} + O(1)$, который нас интересовать не будет и мы его опустим; но с другой стороны, фаза φ, возникшая от логарифма, весьма существенна и приводит к появлению дополнительных констант:

[7] Что не так экзотично, как может показаться. Действительно, точка остановки определяется условием $E = U(x)$, и если энергия большая, то большим также должен быть и потенциал. А как правило, потенциал как раз расходится вблизи полюсов. В таком случае, решать уравнение Шрёдингера в окрестности приходится точнее.

[8] В таком случае может существовать линия анти-Стокса, их соединяющая — приходится проводить несколько сшивок вблизи каждой из точек остановки. При этом может возникнуть интересные интерференционные явления — интерференция волн в комплексной плоскости между точками остановки...

$$\text{Stokes}: \quad \begin{cases} \arg z = -\frac{\pi}{4} & \Rightarrow \psi_\pm(z) \approx \frac{e^{\pm\pi E/4\omega} e^{i\pi/8}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\pm m\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = \frac{\pi}{4} & \Rightarrow \psi_\pm(z) \approx \frac{e^{\mp\pi E/4\omega} e^{-i\pi/8}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\mp m\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = \frac{3\pi}{4} & \Rightarrow \psi_\pm(z) \approx \frac{e^{\mp 3\pi E/4\omega} e^{-3i\pi/8}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\pm m\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = \frac{5\pi}{4} & \Rightarrow \psi_\pm(z) \approx \frac{e^{\mp 5\pi E/4\omega} e^{-5i\pi/8}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\mp m\omega^2|z|^2/2} \end{cases} \tag{34}$$

$$\text{anti-Stokes}: \quad \begin{cases} \arg z = -\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \psi_\pm(z = |z|e^{i\varphi}) \approx \frac{e^{\pm\pi E/2\omega} e^{i\pi/4}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\mp im\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = 0 & \Rightarrow \psi_\pm(z = |z|e^{i\varphi}) \approx \frac{1}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\pm im\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \psi_\pm(z = |z|e^{i\varphi}) \approx \frac{e^{\mp\pi E/2\omega} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\mp im\omega^2|z|^2/2} \\ \arg z = \pi & \Rightarrow \psi_\pm(z = |z|e^{i\varphi}) \approx \frac{e^{\mp\pi E/\omega} e^{-i\pi/2}}{\sqrt{m\omega|z|}} e^{\pm im\omega^2|z|^2/2} \end{cases} \tag{35}$$

(линий Стокса и анти-Стокса по 4 штуки, что можно заметить в том числе и из более общей картинки, которая изображалась выше). Что же мы имеем при обходе комплексной плоскости, скажем, сверху?

- $\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{\pi}{4}$: решение фиксируется наличием только прошедшей волны при $z > 0$; причём поскольку всё происходит на вещественной оси, то амплитуда — это буквально амплитуда прохождения, t:

$$\begin{cases} C_+ &= t \\ C_- &= 0 \end{cases}, \quad \frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{\pi}{4} \tag{36}$$

- $\frac{3\pi}{4} > \arg z > \frac{\pi}{4}$: на линии Стокса $\arg z = \frac{\pi}{4}$, решение ψ_+ экспоненциально затухает, а ψ_- — растёт. Как и раньше, это означает, что C_- при этом не меняется; но поскольку оно строго равно нулю, то не может измениться также и C_+, поэтому амплитуды ровно такие же вплоть до следующей линии Стокса $\arg z = \frac{3\pi}{4}$:

$$\begin{cases} C_+ &= t \\ C_- &= 0 \end{cases}, \quad \frac{3\pi}{4} > \arg z > \frac{\pi}{4} \tag{37}$$

- $\frac{5\pi}{4} > \arg z > \frac{3\pi}{4}$: на линии Стокса $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, решение ψ_+ опять экспоненциально растёт, поэтому C_+ не меняется; а вот C_- может измениться произвольным образом. Получаем:

$$C_+ = t, \quad \frac{5\pi}{4} > \arg z > \frac{3\pi}{4}$$

К сожалению, в отличии от случая с функцией Эйри, обход снизу ничего нового не даст, т.к. при этом тоже придётся пересекать две линии Стокса. Поэтому найти полностью амплитуды прохождения и отражения (с фазами) для такой задачи невозможно. Но полученной связи, в дополнение к условию $R + T = 1$ оказывается достаточно для нахождения самих R и T. Для того, чтобы это сделать, достаточно посмотреть на квазиклассические падающие, отражённые и прошедшие волны, нормированные на константный поток, и сравнить их с комплексными квазиклассическими решениями, выписанными выше:

$$\begin{cases} \psi_i(x < 0) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{-im\omega^2 x^2/2} & \equiv e^{-\pi E/\omega} e^{i\pi/2} \cdot \psi_-(|x|e^{i\pi}) \\ \psi_r(x < 0) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{im\omega^2 x^2/2} & \equiv e^{\pi E/\omega} e^{i\pi/2} \psi_+(|x|e^{i\pi}) \\ \psi_t(x > 0) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{im\omega^2 x^2/2} & \equiv \psi_+(|x|) \end{cases} \tag{38}$$

Из этого мы заключаем, что амплитуды прохождения и отражения связаны условием $r = e^{-\pi E/\omega} e^{-i\pi/2} t$. Можно убедиться, что точные амплитуды прохождения и отражения, хотя и устроены достаточно сложно, но тем не менее этому простому соотношению удовлетворяют! Добавляя условие $R + T = 1$, мы воспроизводим точный ответ, выписанный в начале семинара:

$$\boxed{\begin{cases} R &= \frac{1}{1+e^{2\pi E/\omega}} \\ T &= \frac{1}{1+e^{-2\pi E/\omega}} \end{cases}} \tag{39}$$